

## I - A 236

## アダプティブ space-time 有限要素法による 2 次元移流拡散解析

中央大学 学生員 ○田村 隆志  
中央大学 正会員 樫山 和男

## 1. はじめに

移流拡散現象を正確に把握するためには、界面付近での物理量を精度良く知る必要がある。このためには、界面近傍で細かな要素分割を行う必要があるが、時間とともに移動する界面近傍の要素細分割を、人手で行うことは非常に困難である。また、解析領域全体を細かい有限要素で分割し計算するのでは、計算機容量、計算時間を考慮すると効率的な手段とは言えない。

本報告は、移流拡散解析における上記の問題点を解決するために、アダプティブ space-time 有限要素法を適用することを試みたものである。アダプティブ法の中でも、ここでは誤差測度に応じて節点の位置を移動させる r アダプティブ法を用いる。このため、節点が移動しても時空間に高精度な解析が可能な space-time 有限要素法を採用している。なお、安定化手法には GLS 法 (Galerkin Least-Squares method) を用いている。

## 2. 基礎方程式

移流拡散方程式は (1) 式のように表される。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u_i \phi_{,i} + \kappa \phi_{,ii} = 0 \quad (1)$$

ここで、 $\phi$  は未知関数、 $_{,i}$  は  $i$  方向の偏微分、 $u_i$  は  $i$  方向の移流速度、 $\kappa$  は拡散係数を表す。

## 3. アダプティブ法

本報告で用いる r アダプティブ法は、節点を移動させることにより、誤差測度の大きい要素は要素の大きさを小さくし、誤差測度の小さい要素は要素の大きさを大きくして、少ない節点数で効率の良い計算を行うものである。誤差測度は補間誤差から求め、それを指標にして有限要素の再分割を行っている。

補間誤差を簡便に求める場合の式として、要素内を 1 次補間するときには以下のような式を用いる。

$$E^e = \int_{L_n} \int_{\Omega_e} \phi_{,ii}^e d\Omega_e dt \quad (2)$$

ここで、 $E^e$  は各要素の誤差測度、 $L_n$  は細分化された時間区間、 $\Omega_e$  は要素の空間領域、 $\phi_{,ii}^e$  は各要素における  $\phi$  の  $i$  方向の 2 階微分値である。

$\phi_{,ii}^e$  を求める過程の  $\hat{\phi}_{,i}$  は、(3) 式のように最小二乗法 [1] により各要素における  $\phi_{,i}^e$  を節点に分配して求める。

keywords : 有限要素法, アダプティブ法  
space-time 法, 移流拡散解析

〒112 東京都文京区春日 1-13-27

TEL 03-3817-1815, FAX 03-3817-1803

$$\text{Min} \sum_{e=1}^{N_e} \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} (\hat{\phi}_{,i} - \phi_{,i}^e)^2 d\Omega_e \quad (3)$$

$N_e$  は要素総数、 $\hat{\phi}_{,i}$  は節点における解の勾配、 $\phi_{,i}^e$  は要素における解の勾配で有限要素解析により求めた各節点の  $\phi$  から得られる。そして (3) 式より求めた  $\hat{\phi}_{,i}$  から、要素における解の 2 階微分値  $\phi_{,ii}^e$  を求める。

r アダプティブ法では、各要素ごとに求めた誤差測度  $E^e$  をもとに、節点の位置を移動することで有限要素を改善する。移動後の節点の位置は以下の (4) 式 [1] で得られる。

$$x_i^n = \frac{\sum_{e=1}^{M^n} (E^e / (A^e)^\alpha) x_i^e}{\sum_{e=1}^{M^n} (E^e / (A^e)^\alpha)} \quad (4)$$

$x_i^n$  は節点  $n$  の新しい座標位置、 $M^n$  は節点  $n$  に接続する要素の数、 $E^e$ 、 $x_i^e$ 、 $A^e$  はそれぞれ節点  $n$  に接続する要素の誤差測度、重心位置、面積である。節点の移動距離を調整するパラメーター  $\alpha$  は 0.5 とした。

## 4. space-time slab の座標変換

アダプティブメッシュコントロールによって節点が移動するため、時空間にまたがる要素である space-time slab は任意の六面体になる。六面体の space-time slab で積分をするには、物理座標系  $(x, y, t)$  を正規化した計算座標系  $(\xi, \eta, \theta)$  に変換する必要がある。座標変換マトリクスは、重み関数  $w$  を例にすると、六面体の場合には (5) 式のように表される。

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ \frac{\partial w}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial t}{\partial \theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial t} \end{bmatrix} \quad (5)$$

正規化された  $(\xi, \eta, \theta)$  座標系において、空間方向 1 次、時間方向 1 次で補間したときの重み関数  $w$  は (6) 式のように書き表せる。

$$w(\xi, \eta, \theta) = \sum_j N_j(\xi, \eta) (\pi_n(\theta) w_{j,n+1} + \bar{\pi}_n(\theta) \bar{w}_{j,n}) \quad (6)$$

$N_j$  は空間方向の形状関数であり、空間 2 次元の形状関数は (7) 式のように表される。

$$N_j(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi_\alpha \xi) (1 + \eta_\alpha \eta) \quad (7)$$

また、 $\pi_n$ 、 $\bar{\pi}_n$  は時間方向の形状関数であり、(8)、(9) 式のように表される。

$$\pi_n(\theta) = (\theta + 1) / \Delta t \quad (8)$$

$$\bar{\pi}_n(\theta) = (1 - \theta) / \Delta t \quad (9)$$

## 5. 重みつき残差方程式

space-time GLS 法による移流拡散方程式の重みつき残差方程式は以下になる。

$$\begin{aligned} & \int_{I_n} \int_{\Omega} (w \phi_t + w u_i \phi_{,i} + w_{,i} \kappa \phi_{,i}) d\Omega dt \\ & + \int_{\Omega} w(t_n^+) (\phi(t_n^+) - \phi(t_n^-)) d\Omega \\ & + \sum_e \int_{I_n} \int_{\Omega} (w_{,t} + u_i w_{,i} - \kappa w_{,ii}) \tau (\phi_{,t} + u_i \phi_{,i} - \kappa \phi_{,ii}) d\Omega dt \\ & = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

第1項目は Galerkin 法によるもので、第2項目は節点における時間方向の不連続量を表し jump condition 項と呼ばれる。第3項目は安定化を施す least-squares 項であり、その大きさを決める  $\tau$  は (11) 式により定められる [3]。

$$\tau = \left( \left( \frac{2}{\Delta t} \right)^2 + \left( \frac{2u}{h} \right)^2 + 9 \left( \frac{4\kappa}{h^2} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (11)$$

## 6. 数値解析例

図1のような解析領域及び初期メッシュで、2次元移流拡散解析を行った。移流速度  $u = 50.0$ 、拡散係数  $\kappa = 1.0$ 、微小時間増分量  $\Delta t = 0.05$  で  $t = 1.00$  まで 20 ステップの計算をした。なお、アダプティブ法によるメッシュの再分割は、各時間ステップにつき2回行うことにした。

図2は固定メッシュで計算した Galerkin 法、図3.4はそれぞれアダプティブメッシュコントロールを行った Galerkin 法、GLS 法による計算結果である。それぞれ時間ステップが、1,2,3,4,5,10,20 のときの  $X$  軸方向の数値解をプロットしてある。図1の固定メッシュの Galerkin 法では、解に大きな数値振動が見られる。しかし、メッシュコントロールを行うことにより、図2のように解の変化の激しい  $x = 1.0$  付近に節点が移動して、計算が進むにつれて数値振動も収まっていく様子が見られる。図3では、図2と同様に  $x = 1.0$  付近に節点が移動し、さらに GLS 法を適用したことで、大幅に数値振動が抑えられることがわかる。

## 7. おわりに

アダプティブ space-time 有限要素法による2次元移流拡散解析を行い、どのように節点が移動して計算が行われたかを示した。その結果、得られた結論は以下の2つの点である。

- 1) アダプティブメッシュコントロールを行うことにより、解の変化が急激なところに節点が移動し、高精度な解析が行える。
- 2) GLS 法を適用することにより、移流の卓越による数値振動を抑えて、安定な解析が行える。

今後は、非圧縮粘性流れ解析にアダプティブ space-time 有限要素法を適用する予定である。

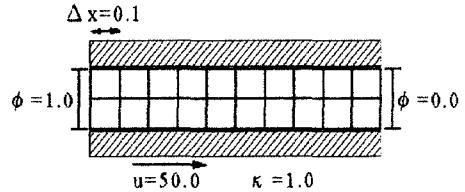


図1 解析条件図 ( $t=0.0$ )

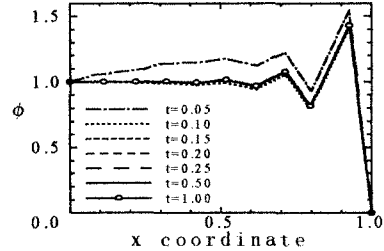


図2 Galerkin 法 (固定メッシュ)

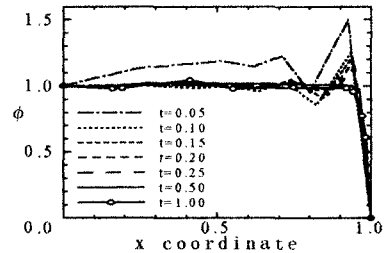


図3 Galerkin 法 (アダプティブメッシュ)

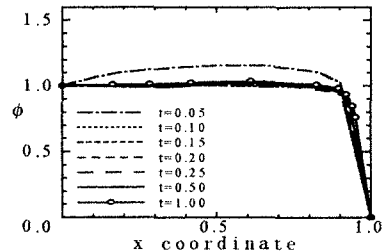


図4 GLS 法 (アダプティブメッシュ)

## 参考文献

- [1] Kashiama, K. and Kawahara, M., "Adaptive finite element method for linear water wave problems", Proc. JSCE., No.387, pp.115-124, 1987
- [2] M Behr, T. E. Tezduyar, "Finite element solution strategies for large-scale flow simulations", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 112, pp3-24, 1994
- [3] Farzin Shakib, Thomas J. R. Hughes, "A new finite element formulation for computational fluid dynamics 9. fourier analysis of space-time Galerkin / least-squares algorithms", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 87, pp35-58, 1991