

BDM の数値解析効率と誤差評価

広島大学 正会員 ○有尾 一郎*

1. はじめに

系の離散化に伴い行列サイズ N を増大させて忠実な再現計算を行なうと、これが起因して固有値計算や微分方程式の数値計算は加速度的に大規模な計算となり、取扱う問題によっては許容できない数値誤差が発生する。特に、対称性を持つ系の数値解析はそのような典型的な問題を抱えている。本研究は、対称性を持つ離散系の数値解析に有効なブロック対角化法(BDM)に対して行列サイズにおける数値解析効率と丸め誤差の評価を行なう。この手法を二面体群 D_n に不変な軸対称構造系の線形振動解析に適用し、解析効率の向上と相対誤差の減少を示すことにより、本手法の有用性を検証する。

2. BDM の解析効率と誤差評価

(1) 数値解析効率の評価

2 階の連立微分方程式の数値解を求める解析効率を検討する。

Runge-Kutta 公式や各種固有値解析法による行列演算の効率を解析時間に最も支配的となる自由度(行列サイズ) N に着目する。直接法による演算量 ρ の主要項が

$$\rho = aN^\alpha \quad (1)$$

と表されると仮定する。ここに a と α はある定数である。このとき BDM による演算量の主要項は

$$\tilde{\rho} = \sum_{\mu \in R(G)} a(N^\mu)^\alpha \quad (2)$$

となる。ここで、 N^μ は既約表現 μ の行列サイズを表す。ブロック K^μ のサイズ N^μ が全て同一であると仮定し、

$$N^\mu \simeq \frac{N}{q(G)} \quad (3)$$

と近似する。ここで、 $q(G)$ は群 G のブロックの全個数を表す。このとき、式(3)を式(2)に代入することにより、BDM による演算量は

$$\tilde{\rho} \simeq a \left(\frac{N^\alpha}{q(G)^{\alpha-1}} \right) \quad (4)$$

と近似でき、また本手法と従来の方法の演算時間の比も式(1)と(4)より、

$$\frac{\tilde{\rho}}{\rho} \simeq \frac{1}{[q(G)]^{\alpha-1}} \quad (5)$$

と近似できる。この式は $\alpha \geq 2$ の場合にはブロックの個数 $q(G)$ の増加に伴い本手法の演算効率が向上することを表している。

(2) 丸め誤差評価

丸め誤差は行列サイズ N が増大すると、これが起因して固有値の数値解に悪影響を及ぼす危険性がある。ここでは主に剛性行列 K を Hessenberg 行列へ変換するときの行列サイズ N における丸め誤差の影響を調べる。直接法による丸め誤差 δK のノルムは、

$$|\delta| \equiv \|\delta K\| \leq a\beta^{1-t} N^\alpha \max_{i,j} |k_{ij}| \quad (6)$$

と表されるものとする。ここで a は 1 以下の定数を、 β^{1-t} は β 進 t 桁浮動小数点演算処理能力を表す。式(6)を利用すると、BDM の 1 ブロックにおける丸め誤差は

$$|\delta^\mu| = \|\delta K^\mu\| \leq a\beta^{1-t} (N^\mu)^\alpha \max_{i,j} |k_{ij}^\mu| \quad (7)$$

と表される。したがって、両者の誤差比をとると、

$$\frac{|\delta^\mu|}{|\delta|} = \frac{(N^\mu)^\alpha \max_{i,j} |k_{ij}^\mu|}{N^\alpha \max_{i,j} |k_{ij}|}$$

と求められる。ここに、式(3)を用いると上式は

$$\frac{|\delta^\mu|}{|\delta|} = \frac{1}{[q(G)]^\alpha} \frac{\max_{i,j} |k_{ij}^\mu|}{\max_{i,j} |k_{ij}|} \propto \frac{1}{[q(G)]^\alpha} \quad (8)$$

と表される。

また、全ブロックに対する誤差比は

* 〒724 東広島市鏡山 1-4-1, Keywords: BDM, symmetric structure, numeric analysis, dome

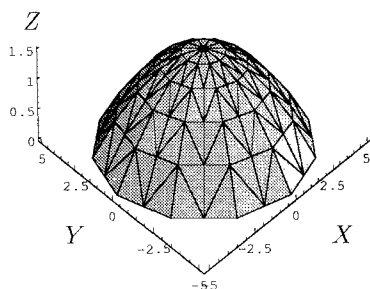


図-1 D_n 不変トラスドーム構造 ($n=12, m=5$)

$$\frac{|\tilde{\delta}|}{|\delta|} = \frac{\sum_{\mu \in R(G)} \|\delta K^\mu\|}{\|\delta K\|} = \frac{1}{[q(G)]^{\alpha-1}} \frac{\max |k_{ij}|}{\max |k_{ij}|} \propto \frac{1}{[q(G)]^{\alpha-1}}$$

と評価できる（通常 $\alpha = 3$ となる）。結果的に丸め誤差は行列サイズ N に依存し、本手法を用いると誤差比は概ね $1/[q(G)]^{\alpha-1}$ 程度に低減できる。

3. ドーム構造への適用

本手法を図-1に示す m 階層 D_n 不変トラスドーム構造に適用した。Runge-Kutta 法により、(天頂節点に鉛直方向に $\cos t (0 \leq t \leq 20\pi, dt = 0.002\text{sec})$ の周期外力を作用させたときの振動解析を行なった。 D_n 不変 m 階層ドーム構造の n, m をパラメータとして変化させたときの直接法と本手法による演算時間を図-2に示す。図-3はパラメータ n および m の値を種々に変化させたときのサイズ N と所要計算時間との関係に対数グラフ上にプロットしたものである。図-4はパラメータ n とその固有値に対する誤差比を示す。

4. 結論

この研究結果より、本手法は解析効率の向上と相対誤差の減少できることが確かめられた。また、数値解析効率および相対誤差の評価式を満足し、評価式の妥当性が確かめられた。

参考文献

- 1) Nicholas J. Higham, Accuracy and Stability of Numerical Algorithms, SIAM, 1996.

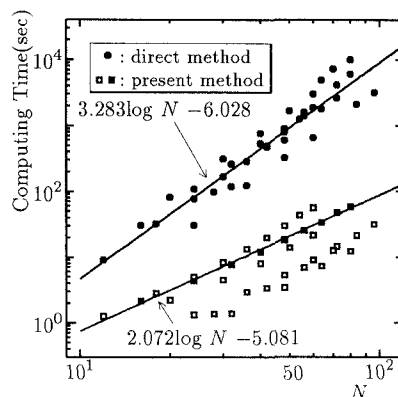


図-2 N に対する Runge-Kutta 法の演算時間

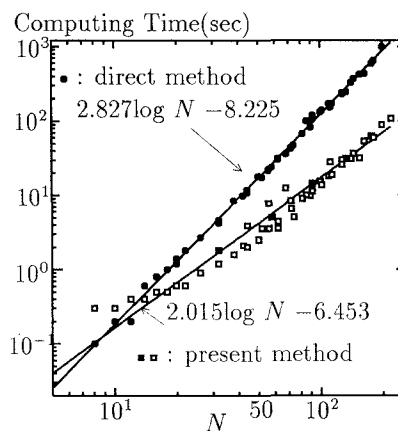


図-3 N に対する QR 反復演算コストの比較

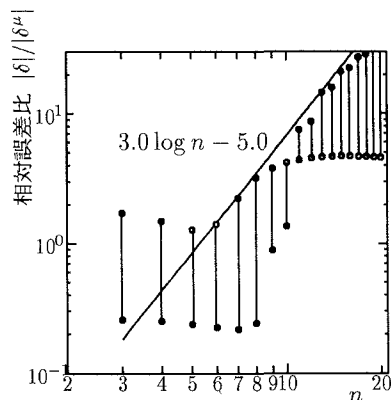


図-4 n の変化に伴う相対誤差比