土木学会第53回年次学術講演会（平成10年10月）

I－A233

有限要素法C_0連続基底関数の超関数表現について

（財）鉄道総合技術研究所　正会員　山下彰彦

1．はじめに

有限要素法では，解く問題の関係式の微分方程式に部分積分を行い，弱形式化と称して求める未知関数の微分回数を低減化する処理を行うことがある．この場合，未知関数の試行関数は局所的に零でなく折れ線部分を持った一次多項式で構成したものについて，C_0連続と称している．このC_0連続の一次多項式の概念について，超関数で表現を行う．

2．1次元問題例での超関数表現

2階常微分方程式の問題

$$\frac{d^2u}{dx^2}+f=0 \qquad 0<x<1 \tag{1}$$

$$u(0)=0,\ u(1)=0 \tag{2}$$

について，未知関数を

$$u=\mathrm{Y}_1u_1+\mathrm{Y}_2u_2+\mathrm{Y}_3u_3 \tag{3}$$

と近似することにする．

ここに，fを定数，u_1は$x=1/4$でのuの値，u_2は$x=1/2$でのuの値，u_3は$x=3/4$でのuの値，$\mathrm{Y}_1,\mathrm{Y}_2,\mathrm{Y}_3$は基底関数で図1に示したものである．

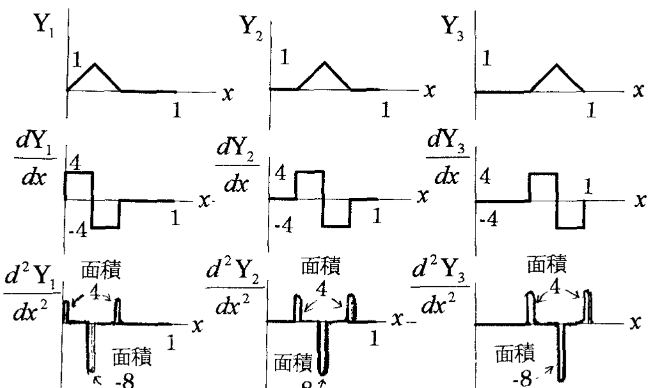


図1．基底関数

$$\frac{d_2\mathrm{Y}_1}{dx^2}=4\delta(x)-8\delta(x-\frac{1}{4})+4\delta(x-\frac{1}{2}) \tag{4}$$

$$\frac{d_2\mathrm{Y}_2}{dx^2}=4\delta(x-\frac{1}{4})-8\delta(x-\frac{1}{2})+4\delta(x-\frac{3}{4}) \tag{5}$$

$$\frac{d_2\mathrm{Y}_3}{dx^2}=4\delta(x-\frac{1}{2})-8\delta(x-\frac{3}{4})+4\delta(x-1) \tag{6}$$

ここに，$\delta(x)$は超関数[3]ディラックのデルタ関数で，$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx$，$\delta(x)=0\ (x\neq 0)$，超関数は無限回微分可能である．

式(1)にガラーキン法を適用すると

$$\int_0^1 v\left(\frac{d^2u}{dx^2}+f\right)dx=0 \tag{7}$$

が成立する。ここに，vは重み関数で，

$$v(0)=0,\ v(1)=0 \tag{8}$$

である．

式(3)を式(7)に代入すると

$$\int_0^1\left(v\frac{d^2\mathrm{Y}_1}{dx^2}+v\frac{d^2\mathrm{Y}_2}{dx^2}+v\frac{d^2\mathrm{Y}_3}{dx^2}\right)dx+f\int_0^1 vdx=0 \tag{9}$$

と展開される．

図1より

$x=1/4$で$\mathrm{Y}_1=0$，$\mathrm{Y}_2=0$，$\mathrm{Y}_3=1$
$x=1/2$で$\mathrm{Y}_1=0$，$\mathrm{Y}_2=1$，$\mathrm{Y}_3=0$
$x=3/4$で$\mathrm{Y}_1=1$，$\mathrm{Y}_2=0$，$\mathrm{Y}_3=0$

であり，式(4)，(5)，(6)を考慮すると 式(9)から

$v=\mathrm{Y}_1$のとき

$$-8u_1+4u_2+f/4=0 \tag{10}$$

$v=\mathrm{Y}_2$のとき

$$4u_1-8u_2+4u_3+f/4=0 \tag{11}$$

$v=\mathrm{Y}_3$のとき

$$4u_2-8u_3+f/4=0 \tag{12}$$

が成立し，次の値が求まる．

$u_1=3f/32$，$u_2=f/8$，$u_3=3f/32$

3．ポアソン方程式問題例での超関数表現

Ωを2次元空間の連結領域とし，その境界がΓでΓ_1とΓ_2から構成されるものとする．

$$\frac{\partial u^2}{\partial x^2}+\frac{\partial u^2}{\partial y^2}+f=0 \qquad (\Omega内) \tag{13}$$

キーワード：有限要素法，C_0連続，基底関数，超関数

連絡先：〒１８５　東京都国分寺市光町２丁目８番３８号　TEL 042-573-7263　FAX 042-573-7398

$$u = 0 \quad (\Gamma_1 \text{上}), \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad (\Gamma_2 \text{上}) \tag{14}$$

ここに，f は定数で，$\boldsymbol{n}$ は法線向き単位ベクトル．

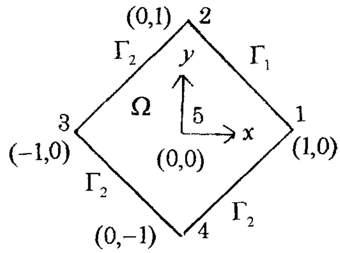


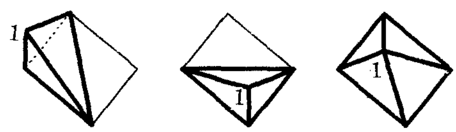
図２ 領域Ωと境界条件指定と座標系

上記ポアソン方程式問題について，未知関数を

$$u = \Phi_3(x,y)u_3 + \Phi_4(x,y)u_4 + \Phi_5(x,y)u_5 \tag{15}$$

と近似することとする．

ここに，u_3 は $(-1,0)$，u_4 は $(0,-1)$，u_5 は $(0,0)$ での $\boldsymbol{u}$ の値で，Φ_3, Φ_4, Φ_5 は基底関数で図３に示す．



$\Phi_3(x,y)$　　$\Phi_4(x,y)$　　$\Phi_5(x,y)$

図３ 基底関数

ここで，超関数 $\delta X(x,y)$ を定義する．

$\delta X(x-\eta,\ y-\xi)$ は $(\eta,\ \xi)$ で $\neq 0$ で，他のところで０である．$dy = 1$ あたり $\int_{-\infty}^{\infty} \delta X(x-\eta,\ y-\xi)dx = 1$ で，x で無限回偏微分可能である．

超関数 $\delta Y(x,y)$ を定義する．$\delta Y(x-\eta,\ y-\xi)$ は $(\eta,\ \xi)$ で $\neq 0$ で，他のところで０である．$dx = 1$ あたり $\int_{-\infty}^{\infty} \delta Y(x-\eta,\ y-\xi)dy = 1$ で，y で無限回偏微分可能である．すると

$$\frac{\partial^2 \Phi_3(x,\ y)}{\partial x^2} \tag{16}$$

$$= \begin{cases} \delta X(x-\eta,\ y-\xi) & \eta = 0,\quad -1 \le \xi \le 1 \\ -\delta X(x-\eta,\ y-\xi) & \eta - \xi = 1,\quad -1 \le \xi \le 0 \\ -\delta X(x-\eta,\ y-\xi) & \eta + \xi = -1, -1 \le \xi \le 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_4(x,\ y)}{\partial y^2} \tag{17}$$

$$= \begin{cases} \delta Y(x-\eta,\ y-\varsigma) & \xi = 0,\quad -1 \le \eta \le 1 \\ -\delta Y(x-\eta,\ y-\varsigma) & \eta + \xi = -1, -1 \le \eta \le 0 \\ -\delta Y(x-\eta,\ y-\varsigma) & \eta - \xi = 1,\quad 0 \le \eta \le 1 \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_5(x,\ y)}{\partial x^2} \tag{18}$$

$$= \begin{cases} -2\delta X(x-\eta, y-\xi) & \eta = 0,\quad -1 \le \xi \le 1 \\ \delta X(x-\eta,\ y-\xi) & \eta + \xi = 1,\quad 0 \le \xi \le 1 \\ \delta X(x-\eta,\ y-\xi) & -\eta + \xi = 1, -1 \le \xi \le 0 \\ \delta X(x-\eta,\ y-\xi) & \eta + \xi = -1, -1 \le \xi \le 0 \\ \delta X(x-\eta,\ y-\xi) & \eta - \xi = 1,\quad 0 \le \xi \le 1 \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_5(x,\ y)}{\partial y^2} \tag{19}$$

$$= \begin{cases} -2\delta Y(x-\eta, y-\xi) & \xi = 0,\quad -1 \le \eta \le 1 \\ \delta Y(x-\eta,\ y-\xi) & \eta + \xi = 1,\quad 0 \le \eta \le 1 \\ \delta Y(x-\eta,\ y-\xi) & -\eta + \xi = 1, 0 \le \eta \le 1 \\ \delta Y(x-\eta,\ y-\xi) & \eta + \xi = -1, -1 \le \eta \le 0 \\ \delta Y(x-\eta,\ y-\xi) & \eta - \xi = 1,\quad -1 \le \eta \le 0 \end{cases}$$

と表現することができる．

式(13)に重み関数 v でガラーキン法を適用すると

$$\int_\Omega v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f\right)dA = 0 \tag{20}$$

であるが，この式に式(15)～(19)を代入すると

$v = \Phi_3(x,y)$ のとき

$$u_3 - u_5 = f/3 \tag{21}$$

$v = \Phi_4(x,y)$ のとき

$$u_4 - u_5 = f/3 \tag{22}$$

$v = \Phi_5(x,y)$ のとき

$$-u_3 - u_4 + 4u_5 = 2f/3 \tag{23}$$

が成立し，次の値が求まる．

$$u_3 = f,\ u_4 = f,\ u_5 = 2f/3$$

４．まとめ

超関数で未知関数 $\boldsymbol{u}$ を表示して，２階常微分方程式問題とポアソン方程式問題を例にとり，ガラーキンの重み付き残差法に直接代入して近似解を求めた．これは，割愛したが，弱形式化したものに C_0 連続基底関数を用いたのと同じ連立１次方程式，解となっている．

参考文献

1)O.C.Zienkiewics, and R.T.Taylor : The Finite Element Method 4th Edition,Mcgraw-Hill,Vol.1,1987.（矢川元基訳者代表：マトリックス有限要素法、科学技術出版社、1996.9）

2)菊池文雄：有限要素法概説、サイエンス社、1980.3

3) Jean-Paul Marchand : DISTRIBUTION an outline, North-Holland Publishing Company,1962.（芹沢正三訳：超関数入門、東京図書、1974.6）