

I - A223

2 段階動的縮小法を用いた自由振動解析

函館工業高等専門学校 正会員 渡辺 力

長岡技術科学大学 正会員 林 正

1. まえがき

構造物の自由振動解析において用いられる静的縮小法では、縮約する変位の動的効果を無視しているため、局所振動モードの影響が多き場合や結合自由度の選び方によって精度が悪化する。局所モードの影響を考慮した動的縮小法¹⁾では、局所モードを多く採ることによって精度は良くなるが、剛性行列の組立手順が複雑で、局所モード数の増大に伴い行列のバンド幅も広くなることから、計算効率が悪化する。さらに、静的縮小法に比べ記憶容量が多くなり、大次元の問題では不利となる。

動的縮小法の欠点を改良した解法として2段階動的縮小法(two phase dynamic condensation method)を提案する。この解法では、全体剛性行列と質量行列の組立手順は線形応力解析と同じで、静的縮小法と同程度の記憶容量があれば良い。本報告では、ハイアラーキ要素法²⁾に本解法を用いて、数値計算により計算効率を検討した結果を報告する。

2. 2段階動的縮小法

2段階動的縮小法では、構造全体モード解析、局所モード解析、連成モード解析の手順で計算を行う。

(1) 固有方程式

ハイアラーキ要素において、結合される自由度を非縮約自由度 d_1 、結合されない自由度を縮約自由度 d_2 に選ぶと、要素での自由振動における固有方程式は、固有円振動数の二乗を固有値として次式で与えられる。

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12}^T & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12}^T & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix}, \quad \lambda = p^2 \quad (1)$$

(2) 構造全体モード解析

式(1)に静的縮小法を用いて d_2 を消去したものを構造全体に組み立てると次式が得られる。

$$[\hat{K}_{11}] D_1 = \lambda [\hat{M}_{11}] D_1 \quad (2)$$

式(2)の固有値を λ_i 、固有ベクトルを ψ_i として、低次のものから必要な次数 n まで選んだモーダルマトリックスとスペクトル行列を次式で表す。

$$\Psi_1 = [\psi_1 \ \psi_2 \ \cdots \ \psi_n], \quad \Lambda_1 = \text{diag}[\lambda_i] \quad (3)$$

(3) 局所モード解析

式(1)の第2式で $d_1=0$ とした次の固有方程式を考える。

$$[k_{22}] \phi = \lambda [m_{22}] \phi \quad (4)$$

式(4)の固有値を λ_i 、固有ベクトルを ϕ_i として、低次のものから数個の固有モードを選んだモーダルマトリックスとスペクトル行列を次式で表す。

$$\Phi_2 = [\phi_1 \ \phi_2 \ \cdots], \quad \Lambda_2 = \text{diag}[\lambda_i] \quad (5)$$

この動的効果を考慮して、動的縮小法における構造全体の固有方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \hat{K}_{11} & 0 \\ 0 & \hat{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \hat{M}_{11} & \hat{M}_{12} \\ \hat{M}_{12}^T & \hat{M}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} \quad (6)$$

ここに、 C_2 は縮小された縮約自由度(局所振幅ベクトル)で、2段階動的縮小法では、式(6)を直接解せずに、次のような手順で全体モードの縮小を行う。

Key Word : two phase dynamic condensation, free vibration, hierarchic element

連絡先(函館市戸倉町 14-1 ・ TEL/FAX 0138-59-6488)

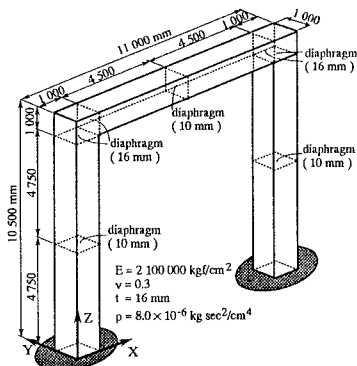


図-1 薄肉門形ラーメン

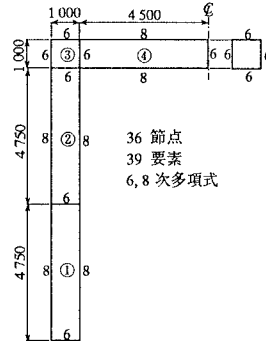


図-2 ハイラーキ要素分割

表-1 門形ラーメンの固有振動数

次数	FEM [Hz]	非縮約 [Hz]	誤差 $(p - p_0)/p_0 \times 100$ (%)				
			静的縮小	動的			
				$n_c = 40$	$n_c = 0$	$n_c = 3$	$n_c = 5$
1	6.249	6.247	0.06	0.01	0.01	0.01	0.01
2	9.524	9.515	0.06	0.02	0.02	0.02	0.02
3	12.136	12.121	0.21	0.05	0.05	0.05	0.05
4	34.558	34.475	3.02	0.34	0.37	0.37	0.37
5	37.058	36.913	3.49	0.40	0.46	0.46	0.45
6	40.871	40.807	11.93	0.01	0.01	0.01	0.01
7	40.871	40.807	11.93	0.01	0.01	0.01	0.01
8	41.047	40.899	12.00	0.01	0.01	0.01	0.01
9	41.047	40.899	12.00	0.01	0.01	0.01	0.01
10	41.141	41.021	12.04	0.01	0.01	0.01	0.01
11	41.260	41.120	12.11	0.01	0.01	0.01	0.01
12	46.621	46.381	10.21	0.03	0.03	0.03	0.03
13	46.621	46.381	14.31	0.03	3.26	0.03	0.03
14	47.320	46.737	13.48	0.01	4.64	0.02	0.02
15	47.320	46.737	13.89	0.01	5.66	0.02	0.02
縮約自由度			2544	2584	55	58	60
総自由度数			28302	9834			
計算時間比			1.00	1.47	1.08	1.16	1.22

（４）連成モード解析

式(3)の静的縮小法の解を用いて、式(6)の構造全体の振動モードについて縮約を行うと２段階動的縮小法による連成モード解析による固有方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \tilde{K}_{11} & 0 \\ 0 & \hat{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \tilde{M}_{11} & \tilde{M}_{12} \\ \tilde{M}_{12}^T & \hat{M}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

ここに、 C_1 は縮小された構造全体モード（全体振幅ベクトル）であり、 $\tilde{K}_{11}$ などは次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \tilde{K}_{11} &= \Psi_1^T \hat{K}_{11} \Psi_1 = \text{diag}[P_i], \quad \tilde{M}_{11} = \Psi_1^T \hat{M}_{11} \Psi_1 = \text{diag}[Q_i], \quad \tilde{M}_{12} = \Psi_1^T \hat{M}_{12} \\ P_i &= \Psi_i^T \hat{K}_{11} \Psi_i = \Lambda_i Q_i, \quad Q_i = \Psi_i^T \hat{M}_{11} \Psi_i, \quad D_1 = [\Psi_i] C_1 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式(7)の固有値問題は、せいぜい百元程度であるので、一般化 Jacobi 法を用いて計算する。また、相似変換により式(7)を標準固有値問題に変換することができる。この解法を２段階逆動的縮小法と呼ぶことにする。なお、数値計算では、 C_1 の次数を n より数個 (n_0) 多く用いることとする。

３．数値計算例

図-1に示す高さ 10.5m、幅 11m、奥行き 1m の薄肉門形ラーメンをハイラーキ要素法により計算を行って、２段階動的縮小法における連成モード数 n_0 の採り方と計算効率を調べる。局所モード数は各要素の式(5)より低次のものから順に n_c 個選ぶものとする。要素分割は、ダイヤフラムの取り付け位置でのみ分割するものとし、図-2に要素分割と多項式の次数を示してある。また、比較解には、８節点要素を用いて 1600 要素、4717 節点でモデル化した FEM 解を用いる。

表-1には、求める固有値の数を $n=15$ とし、FEM および非縮約時の固有振動数と、静的縮小解、 $n_c=40$ を用いた動的縮小解、 $n_c=40$ とし $n_0=0, 3, 5$ と採ったときの２段階縮小解の非縮約解に対する誤差を示した。また、縮小解は太枠内が FEM 解および非縮約解のモードと一致している。

動的縮小法では 15 次まですべての縮小誤差が 1% 以下で、自由度数は非縮約時の約 1/4 に、計算時間は静的縮小法の約 1.5 倍となっている。それに対して２段階縮小法では、 $n_0=0$ で 13~15 次の誤差が 3~5% 生じているが、 $n_0=3$ を用いると誤差は 1% 以下となって、動的縮小法と同程度の縮小の誤差となっている。また、自由度数は約 1/170 に縮小され、計算時間は静的縮小法の約 1.2 倍となっている。このことから、２段階動的縮小法では、動的縮小法に比べ記憶容量を減少させることができ、動的縮小法の計算効率を改善することができる。

参考文献

- 林 正・渡辺 力：節点帯板法による薄肉構造物の自由振動解析，土木学会論文集，No.549/I-37，pp.141-148，1996。
- 林 正・山中素直・加瀬部弘・佐藤敏亮：ハイラーキ要素による有限要素解析の効率化，土木学会論文集（掲載予定）