土木学会第53回年次学術講演会（平成10年10月）

I－A220

# 空間梁の回転自由度と剛性方程式の定式化について

東北大学大学院　○学生員　小林　裕
東北大学工学部　　正　員　後藤　文彦
東北大学工学部　　正　員　岩熊　哲夫

## 1.　まえがき

有限変位梁モデルの回転群は線形空間上では表せないため，ポテンシャルの定義が難しく，その第一変分に当たる仮想仕事式から剛性方程式を導出するのが一般的である．こうして導かれた剛性行列に線形空間上での通常の微分操作を施した場合，一般に幾何剛性行列からは非対称な接線行列が，基本剛性行列からは対称な接線行列が得られることが知られている．因みに，共変微分やセミタンジェンシャル軸を導入することで，幾何剛性行列からも対称な接線行列を得る手法も近年，報告されている．以上は，回転自由度に回転群を表す独立な三つのパラメータを用いた例であるが，仮想仕事から定式化を導く場合には，回転自由度に，微少でしか存在しない直交三固定軸回りの回転角を用いることもできる．

この回転自由度に対応する外力モーメントは，通常の直交三固定軸回りの成分で与えることができるため，一節点に二軸曲げやねじれを同時に受けるような構造系の解析には有利である．但し，この回転自由度に対応するモーメントが保存力として存在する保証はなく，よって基本剛性行列の接線行列すら対称になる保証はない．本研究では，回転自由度の異なるいくつかの定式化を導き，直交三固定軸回りの回転自由度を用いた定式化の接線基本剛性行列が対称か否か，また，そのことが数値解析の精度に影響を与えるかどうかについて検討する．

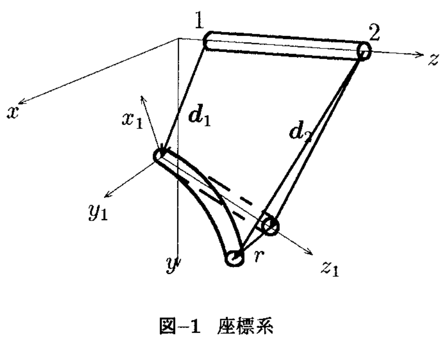
## 2.　定式化

**図–1** のような梁要素の変形後の節点 1 で接する局所座標系を考える．ここで，節点 1，2 の変位について回転自由度に直交三軸座標固定軸回りの回転角を用いた変位ベクトルを $\overline{\boldsymbol{d}}_1$，$\overline{\boldsymbol{d}}_2$ とし，座標変換に用いるオイラー角，擬回転ベクトルといった回転パラメータで表わした変位ベクトルを $\underline{\boldsymbol{d}}_1$，$\underline{\boldsymbol{d}}_2$ とする．節点 1 に対する節点 2 の全体座標系での相対変位 $\boldsymbol{r}$ は，$\overline{\boldsymbol{d}}, \underline{\boldsymbol{d}}$ の関数で表わされる．また局所座標系で表わした相対変位を $\boldsymbol{r}^{\ell}$ とすると，局所座標系での外力ベクトル $\boldsymbol{f}^{\ell}$ と微小変位理論の剛性行列で関係付けられる．

$$\boldsymbol{f}^{\ell} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{r}^{\ell} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{T}^T\boldsymbol{r} \qquad (1)$$

ここで，$\underline{\boldsymbol{d}}$ と仕事をする外力ベクトルを $\underline{\boldsymbol{f}}$ とし全体系と局所系での仮想仕事が等しいとすると，$\underline{\boldsymbol{f}} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{f}^{\ell}$ という関係が導かれる．これを上式に代入し，全体系での剛性方程式とその接線剛性方程式を得る．

$$\underline{\boldsymbol{f}} = \boldsymbol{R}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{T}^T\boldsymbol{r} \qquad (2) \qquad\qquad \Delta\underline{\boldsymbol{f}} = \boldsymbol{K}_{t1}\Delta\underline{\boldsymbol{d}} \qquad (3)$$




**図–1　座標系**

式 (3) の接線剛性行列 $\boldsymbol{K}_{t1}$ は対称になった．

また $\overline{\boldsymbol{d}}$ と $\underline{\boldsymbol{d}}$ の微小増分同士は $\Delta\underline{\boldsymbol{d}} = \boldsymbol{E}\Delta\overline{\boldsymbol{d}}$ という関係で結び付ける事が出来るため，上式の回転自由度を直交三軸座標固定軸回りの回転角で置き換えた剛性方程式と接線剛性方程式を得る．

$$\overline{\boldsymbol{f}} = \boldsymbol{E}^T\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{T}^T\boldsymbol{r} \qquad (4) \qquad\qquad \Delta\overline{\boldsymbol{f}} = \boldsymbol{K}_{t2}\Delta\overline{\boldsymbol{d}} \qquad (5)$$

式 (5) の接線剛性行列 $\boldsymbol{K}_{t2}$ は非対称になった．

## 3.　ねじれ荷重による座屈の問題

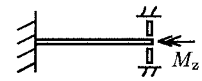
### (1)　座屈荷重

ねじれモーメントを受ける直線梁のねじれ座屈について解析する．この解析モデルを**図–2** に示す梁は一端固定，他端は梁の軸方向の並進変位とその軸回りの回転のみ自由とする．梁の断面が二軸対称断面である場合の座屈荷重については Grennhill が解析解を求めている．**図–2** で示した材料諸元の下では，$M_{cr}\ell/\pi EI = 2.860$ となる．

**Key Words:** 有限変位，回転群，接線剛性行列

〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉06 東北大学工学部土木工学科構造強度学研究室 (022-217-7443, Fax 022-217-7441)

この解析モデルにおける要素数と座屈荷重の関係を図–**3** に示す．式 (3),(5) の数値解は，それぞれの要素数で有効桁四桁まで完全に一致していた．要素数 32 の時，数値解は解析解より 1.1 ％小さめの値に，最終的には 0.2 ％程度小さい値に収束する．




$E = 71240$ N/mm$^2$ $I_x = 0.0833$ mm$^4$
$G = 27190$ N/mm$^2$ $I_y = 0.0833$ mm$^4$
$L = 240$ mm $J = 2.16$ mm$^4$

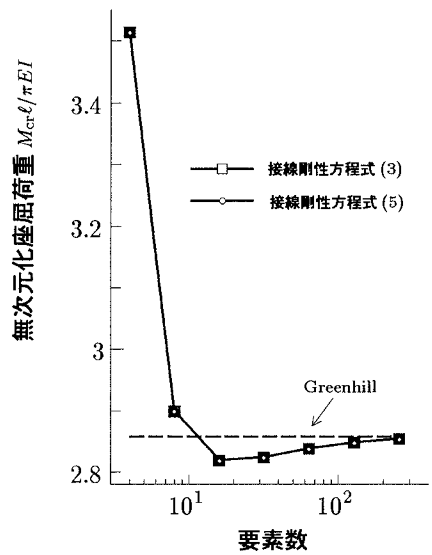
図–**2** 解析モデル

### (2) 座屈後の経路の追跡

梁のねじれ座屈後に生じる空間的な大変位を伴う挙動について式 (3),(5) と紙田，近藤[1)]の研究による数値解と比較する．図–**2** に示した梁は，座屈点で固有値が二つ負になる二重分岐点であり，このような問題では追跡したいモードが生じるような拘束を加えなければ非自明な経路には移行しない．本解析では梁の最大たわみが $y$–$z$ 平面に発生するような拘束を与えている．

式 (3),(5) の数値解，また紙田，近藤の数値解による先端のねじれ角とトルクによる荷重変位曲線を図–**4** に示す．式 (3) と式 (5) を用いた場合，座屈後，負の固有値が一つ表れる不安定経路に移り，極小点を越えると負の固有値は無くなり安定経路に移る．そのまま荷重とともにねじれ角も増加し続け，荷重零の付近でねじれ角も零になる．この荷重変位曲線の特徴は紙田，近藤の解とよく一致している．

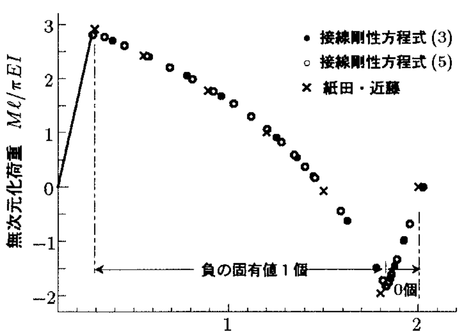
次に図–**5** に式 (5) を用いて解析を行った場合の，変形形状を示す．座屈後に空間的な変形を生じ，極小点で変形が円に近づいた後，荷重零で真円となる特徴的な変形が追跡できている事が解る．式 (3) を用いた場合にも全く同様の変形挙動を示している．



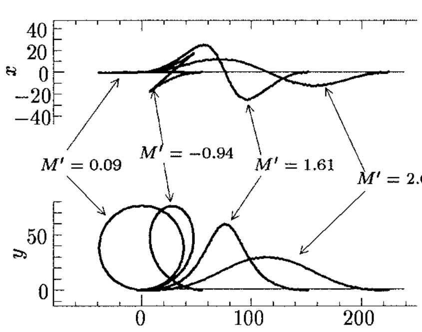

図–**3** ねじれ荷重を受ける梁の座屈荷重

## 4. まとめ

仮想仕事式から梁の有限変位解析の定式化を導く際に，回転自由度に回転群を表わすパラメータを用いた場合と，直交三軸座標の固定軸回りの微小回転角成分を用いた場合について，幾何剛性を除く剛性方程式を導出した．これらの接線剛性行列は，前者は対称となり後者は非対称となった．しかし，収束速度や精度に有為な差は認められなかった．




図–**4** 先端にねじれ荷重を受ける梁の荷重変位曲線




図–**5** ねじれ荷重を受ける梁の変形形状

**参考文献**

1) 紙田 徹，近藤 恭平: 梁の 3 次元大変形の有限要素法解析 (第 2 報)，日本航空宇宙学会誌，43(1995)，pp.344-349