土木学会第53回年次学術講演会（平成10年10月）

I－A219

中間荷重が作用する骨組構造の有限変位解析

八代高専　正　員　○橋本　淳也
熊本工業大学　正　員　三池　亮次
熊本大学　正　員　小林　一郎
熊本工業大学　学生員　宮元　謙次

1. はじめに

部材間に中間荷重が作用する場合の微小変位骨組構造解析の基礎式を接続マトリックスと平衡マトリックスを用い、簡潔に表示することについては先に発表のとおりである[2]。有限変位骨組構造解析の基礎式を補仮想仕事の定理を用いて誘導する。なお、接続マトリックス C とは、部材力 $\mathbf{p}_m$ と節点力 $\mathbf{p}$ の関係を規定する係数マトリックス、平衡マトリックスは H は、部材の両端の断面力の関係を規定するもので、*Livesley*[3] によって定義された。

2. 中間荷重が作用する場合の有限変位骨組構造解析の基礎式の誘導

有限変位補仮想仕事の定理に基づき、骨組構造部材 (i,j) に補仮想仕事の定理を適用する。ここで、仮想の状態において中間荷重は作用しないものとする。

有限変位を(1)変形の初期状態、(2)変形の中間状態（以下、中間状態）、(3)変形後の状態に分ける。仮想の状態の変形後において、部材の始端から ξ の断面 P における仮想力を$\delta\bar{\mathbf{p}}_{m\xi}=\delta(\bar{\mathbf{p}}'_{m\xi}+\Delta\bar{\mathbf{p}}_{m\xi})$、部材の終端 j における仮想力を $\delta\bar{\mathbf{p}}_{mj}=\delta(\bar{\mathbf{p}}'_{mj}+\Delta\bar{\mathbf{p}}_{mj})$ とする。ここに、$\bar{\mathbf{p}}'_{m\xi}$ は中間状態における値を、$\Delta\bar{\mathbf{p}}_{m\xi}$ は中間状態よりの増分の断面力を与えるとする。$-$ は仮想状態を表す。変形後の仮想状態において

$$\delta(\bar{\mathbf{p}}'_{m\xi}+\Delta\bar{\mathbf{p}}_{m\xi})+\mathbf{H}_{\xi j}\delta(\bar{\mathbf{p}}'_{mj}+\Delta\bar{\mathbf{p}}_{mj})=\mathbf{0} \qquad (1)$$

真の状態において、中間状態、変形後の釣り合い式はそれぞれ

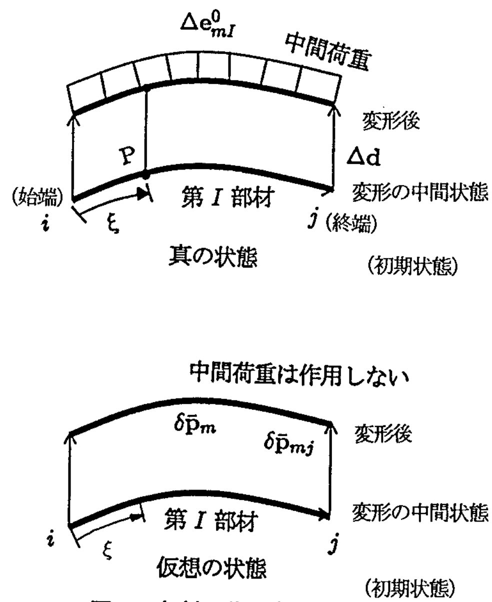
$$\mathbf{p}'_{m\xi}+\mathbf{H}'_{\xi j}\mathbf{p}'_{mj}+\mathbf{q}'_{L\xi j,\xi}=\mathbf{0} \qquad (2)$$

$$(\mathbf{p}'_{m\xi}+\Delta\mathbf{p}_{m\xi})+\mathbf{H}_{\xi j}(\mathbf{p}'_{mj}+\Delta\mathbf{p}_{mj})+\mathbf{q}_{L\xi j,\xi}=\mathbf{0} \qquad (3)$$

で表わされる。ここに、$\mathbf{q}'_{L\xi j,\xi}$ は Pj 間部材における P 端固定荷重定数である[2]。式(2)と(3)から

$$\Delta\mathbf{p}_{m\xi}=-\mathbf{H}_{\xi j}(\mathbf{p}'_{mj}+\Delta\mathbf{p}_{mj})+\mathbf{H}'_{\xi j}\mathbf{p}'_{mj}-\mathbf{q}_{L\xi j,\xi}-\mathbf{q}'_{L\xi j,\xi}$$

また、I部材について仮想の力が真の状態の変形ベクトル[1] $\Delta\mathbf{e}^0_{m\xi}$ に対してなす内部補仮想仕事は上式を用い



図－1 部材に作用する力

$$\begin{aligned}\delta\Delta U_I &= \int_I \delta(\bar{\mathbf{p}}'_{m\xi}+\Delta\bar{\mathbf{p}}_{m\xi})^T(\Delta\mathbf{e}^0_{m\xi}+\Delta\mathbf{e}_{m\theta,\xi})_I d\xi \\ &= -\delta\bar{\mathbf{p}}^T_{mj,I}\int_I\left\{\mathbf{H}^T_{\xi j}\left(\mathbf{F}_e\Delta\mathbf{p}_{m\xi}+\Delta\mathbf{e}_{m\theta,\xi}\right)\right\}d\xi \\ &= \delta\bar{\mathbf{p}}^T_{mj,I}\int_I\{(\mathbf{H}^T_{\xi j}\mathbf{F}_e\mathbf{H}_{\xi j})\Delta\mathbf{p}_{mj}+(\mathbf{H}^T_{\xi j}\mathbf{F}_e\Delta\mathbf{H}_{\xi j})\mathbf{p}'_{mj}+\mathbf{H}^T_{\xi j}\mathbf{F}_e\Delta\mathbf{q}_{L\xi j,\xi}-\mathbf{H}^T_{\xi j}\Delta\mathbf{e}_{m\theta,\xi}\}d\xi\end{aligned} \qquad (4)$$

ここに $\Delta\mathbf{H}_{\xi j}=\mathbf{H}_{\xi j}-\mathbf{H}'_{\xi j}$ ，$\Delta\mathbf{q}_{L\xi j,\xi}=\mathbf{q}_{L\xi j,\xi}-\mathbf{q}'_{L\xi j,\xi}$ である。

キーワード：補仮想仕事の定理、骨組、有限変位、中間荷重
連絡先（〒866-0074 熊本県八代市平山新町2627 TEL 0965-35-1611 FAX 0965-33-0616）

有限変位の場合には、補仮想仕事が仮想状態における真の変形ベクトル$\Delta \mathbf{e}^0_{m\xi}$ とそれ以外にみかけの変形ベクトル $\Delta \mathbf{e}_{m\theta,\xi}$ で構成される。[1]。真の変形ベクトル $\Delta \mathbf{e}^0_{m\xi}$ は$\Delta \mathbf{e}^0_{m\xi} = \mathbf{F}_e \Delta \mathbf{p}_{m\xi}$ である。$\mathbf{F}_e$ は次式で表されるたわみ性マトリックスである。

$$\mathbf{F}_e = \begin{bmatrix} \frac{1}{EA} & & 0 \\ & \frac{1}{GA} & \\ 0 & & \frac{1}{EI} \end{bmatrix}$$

である。また

$$\begin{array}{lll} \mathbf{F}_{mI} = \int_I \mathbf{H}^T_{\xi j}\mathbf{F}_e\mathbf{H}_{\xi j}d\xi & , & \Delta\mathbf{F}_{mI} = \int_I \mathbf{H}^T_{\xi j}\mathbf{F}_e\Delta\mathbf{H}_{\xi j}d\xi \\ \Delta \mathbf{e}_{\theta I} = -\int_I \mathbf{H}^T_{\xi j}\Delta\mathbf{e}_{m\theta,\xi}d_\xi & , & \Delta\mathbf{e}_{qI} = \int_I \mathbf{H}^T_{\xi j}\mathbf{F}_e\Delta\mathbf{q}_{L\xi j,\xi}d_\xi \end{array} \tag{5}$$

を定義すれば

$$\delta\Delta U_I = \delta\bar{\mathbf{p}}^T_{mj,I}\{\mathbf{F}_{mI}\Delta\mathbf{p}_{m\xi,I} + \Delta\mathbf{F}_{mI}\Delta\mathbf{p}'_{m\xi,I} + \Delta\mathbf{e}_{q,I} + \Delta\mathbf{e}_{\theta,I}\} \tag{6}$$

を得る。したがって、骨組構造の仮想状態における外力$\delta\bar{\mathbf{p}} = \delta(\bar{\mathbf{p}}' + \Delta\bar{\mathbf{p}})$ が実際の変位 $\Delta\mathbf{d}$ に対してなす外部補仮想仕事は式(6)の第 I 部材の内部補仮想仕事を全部材について集めたものに等しく

$$\delta(\bar{\mathbf{p}}' + \Delta\bar{\mathbf{p}})^T\Delta\mathbf{d} = \delta\bar{\mathbf{p}}^T_m\{\mathbf{F}_m\Delta\mathbf{p}_m + \Delta\mathbf{F}_m\Delta\mathbf{p}'_m + \Delta\mathbf{e}_q + \Delta\mathbf{e}_\theta\} \tag{7}$$

ここに$\delta\bar{\mathbf{p}}_m = \{\delta\bar{\mathbf{p}}_{mj,I}\}$，$\Delta\mathbf{p}_m = \{\Delta\mathbf{p}_{m\xi,I}\}$，$\Delta\mathbf{p}'_m = \{\Delta\mathbf{p}'_{m\xi,I}\}$，$\Delta\mathbf{e}_q = \{\Delta\mathbf{e}_{q,I}\}$，$\Delta\mathbf{e}_\theta = \{\Delta\mathbf{e}_{\theta,I}\}$ で、$\{\ \}$ はその中の値をブロック要素とするベクトルある。また、$\mathbf{F}_m = diag\{\mathbf{F}_{mI}\}$，$\Delta\mathbf{F}_m = diag\{\Delta\mathbf{F}_{mI}\}$ で、$diag\{\ \}$ は$\{\ \}$ の中の値をブロック対角要素とするマトリックスである。

変形後の接続マトリックス $\mathbf{C}$ を用い$\delta\mathbf{p} = \mathbf{C}\delta\mathbf{p}_m$ の関係があるから、これを式(7)に代入

$$\delta\mathbf{p}^T_m\mathbf{C}^T\Delta\mathbf{d} = \delta\bar{\mathbf{p}}^T_m\{\mathbf{F}_m\Delta\mathbf{p}_m + \Delta\mathbf{F}_m\Delta\mathbf{p}'_m + \Delta\mathbf{e}_q + \Delta\mathbf{e}_\theta\}$$

これより $\mathbf{K}_m = \mathbf{F}^{-1}_m$ として

$$\Delta\mathbf{p}_m = \mathbf{K}_m\mathbf{C}^T\Delta\mathbf{d} + \Delta\mathbf{c}_m \tag{8}$$

ここに $\Delta\mathbf{c}_m$ は $\Delta\mathbf{d} = \mathbf{0}$ とするときの中間荷重による断面力を与える荷重項であり

$$\Delta\mathbf{c}_m = -\mathbf{K}_m(\Delta\mathbf{F}_m\Delta\mathbf{p}'_m + \Delta\mathbf{e}_q + \Delta\mathbf{e}_\theta) \tag{9}$$

真の中間状態、変形後の状態における節点外力 $\mathbf{p}$ と終端の断面力 $\mathbf{p}_m$ の間にはそれぞれ

$$\mathbf{p}' = \mathbf{C}'\mathbf{p}'_m + \mathbf{c}'_L$$

$$(\mathbf{p}' + \Delta\mathbf{p}) = (\mathbf{C}' + \Delta\mathbf{C})(\mathbf{p}'_m + \Delta\mathbf{p}_m) + \mathbf{c}_L$$

が成り立つ[2]。ここに $\mathbf{c}_L, \mathbf{c}'_L$ は変形後および変形の中間状態における部材力 $\mathbf{p}_m$ をここでは部材終端における値で表すために、それを始端における値に換算するために生じる荷重項で、$\Delta\mathbf{c}_L = \mathbf{c}_L - \mathbf{c}'_L$ とすると、上式および式(8)を用い

$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{C}\mathbf{K}_m\mathbf{C}^T\Delta\mathbf{d} + \mathbf{C}\Delta\mathbf{c}_m + \Delta\mathbf{C}\mathbf{p}'_m + \Delta\mathbf{c}_L$$

を得る。上式をまとめて

$$\mathbf{p} = \mathbf{K}\Delta\mathbf{d} + \mathbf{b} \tag{10}$$

ここに

$$\mathbf{K} = \mathbf{C}\mathbf{K}_m\mathbf{C}^T \quad , \quad \mathbf{b} = \mathbf{C}\delta\mathbf{c}_m + \Delta\mathbf{c}_L + \Delta\mathbf{C}\mathbf{p}'_m \tag{11}$$

上の基礎式を用い、中間荷重作用の有限変位解析が可能となる。

参考文献

1)Miike,R.，Kobayashi，I. and Yamada,Y.：Virtual Large Displacement Theorem for Framed Structures, J.Engrg. Mech. ASCE, pp411-428, 1990.

2) 宮元謙次，橋本淳也，三池亮次：接続マトリックスを用いた中間荷重作用の骨組構造解析, 土木学会第52回年次学術講演会講演概要集1-A,pp.230-231,1997.9

3)Livesley, R. K. :Matrix methods of structual analysis, Pergamon Press Ltd., England, 1964.