Ｉ－Ａ214 同次補間を用いた適合型有限要素法による非圧縮粘性流れ解析

中央大学　学員　奥村 弘
八戸高専　正員　丸岡 晃
中央大学　正員　川原 睦人

1 はじめに

有限要素法による数値解の良否は、メッシュのクオリティーに大きく依存することは良く知られている。元来、数値解析手法の一つである有限要素法は補間関数を用いた近似解法であり、不適切なメッシュではわれわれが望むような結果を得ることは難しい。一般にクオリティーの高いメッシュとは、歪みの少ない要素形状を持つものである。誤差の大きな領域では、要素寸法が小あるいは要素次数が高次なものが必要である。また、同時に要素寸法や要素次数の変化がスムーズであることも必要である。適合型 (アダプティブ) 有限要素法の出現以前においては、経験者らによってプリプロセスが試行錯誤的に膨大な時間を労して行われてきた。このことは、われわれの感覚と実際の誤差ノルムの分布の間には大きな隔たりがあり、また手作業による試行錯誤のメッシュ生成の限界を示していると言える。定常解を持つ問題のみならず、ましてや非定常解を有する問題においては初期に生成したメッシュのみでの解析では最適な解を得ることはまず不可能である。

近年ではアダプティブ法の研究が急速に進められてきている。しかしながら計算機容量、計算効率の面からするといまだ十分な成果とは言いがたい。Zienkiewicz ら [1] の、Bercovier–Pironneau 要素を用いた研究などに見られるように、現在に至っては混合補間を用いた適合型有限要素解析が主に行われて来ている。また、p–法 (要素高次化法) による解の収束性に優れた手法も多くも提案されているが、要素の高次化と共により多くの積分点が必要となり、計算効率が低下し、さらに必要以上の高次要素を用いると解の振動が起こるなどの問題点がある。著者らは同次補間を用いた安定性に優れ、高効率な数値解析手法 [2] を開発、検討して来た。本研究では、同次補間を用いることによってアダプティブ解析の汎用化、高効率化を目指した適合型の有限要素流れ解析の手法を提案する。補間誤差定理により導いた最適要素寸法を解析領域全体に分布させることによりメッシュのコントロールをそのつど行う。本手法の有用性、適用性を検討、考察するために定常解を持つ円柱周りの流れ ($Re = 40$) を取り上げ、誤差ノルムに従って的確に要素寸法が線形的にコントロールできていることを示したのち、数値解析例として Cavity 内の流れ ($Re = 1000$) 解析をした。

Keywords: 適合型有限要素法、同次補間、改良型 BTD 法、分離型法、非圧縮 Navier–Stokes 方程式
中央大学大学院理工学研究科
(〒112 東京都文京区春日 1-13-27,
TEL:03-3817-1814, FAX:03-3817-1803)

2 非圧縮 Navier–Stokes 方程式

非圧縮粘性流れの基礎方程式である非圧縮 Navier–Stokes 方程式は、無次元化することによって、以下の運動方程式と連続式によって表される。

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u} = \nabla \cdot \{-p\boldsymbol{I} + \nu[\nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{u})^T]\} \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (2)$$

ここで、Ω は境界 Γ で囲まれた解析領域、$\boldsymbol{u}$ は流速ベクトル、p は圧力、$\boldsymbol{I}$ は単位テンソル、また $\nu = Re^{-1}$ であり、Re は Reynolds 数である。

3 数値解析手法

時間方向の離散化には、安定性に優れ時間増分を大きくとれる陰的解法を適用する。運動方程式 (1) に Crank–Nicolson 法を適用し、連続式 (2) は完全陰的に表す。移流速度に関しては、２次精度 Adams–Bashforth 公式により線形近似している。このようにして得られたスキームは、時間に関して２次精度を有する線形スキームとなっている。

空間方向の離散化には改良型 BTD 法と分離型法 (FS) 法を組合わせた有限要素法 [2] を適用する。分離型法 [3] は圧力 Poisson 方程式を導くことによって流速場と圧力場を分離して解くことが出来るため大規模な問題を解析するのに極めて有効である。また、流速場と圧力場の補間関数にそれぞれ一次や双一次の同次のものを用いる同次補間を行うことも可能である。改良型 BTD 法は陰的解法であるため安定性に優れ、対称行列の解法となるため計算効率にすぐれている。また、この改良型 BTD 法を分離型法に適用した手法は、安定化有限要素法の一つである SUPG 法と PSPG 法を組み合わせた手法の安定化パラメータの定義を変えることによって導くことが可能であり、安定化有限要素法に等価となることが示されている [2]。

4 事後誤差評価

事後誤差評価 (*a posteriori* error estimation) とは、解析結果を基とする誤差の推定法である。誤差推定法の選択として、補間誤差による方法を用いる。これは、厳密解を補間した誤差ノルムが領域全体では有限要素近似誤差ノルムの上限を示すと言う補間定理を要素レベルにまで拡張し、個々の要素で有限要素誤差ノルムを補間誤差ノルムで代用する方法である。この方法は数学的背景が明確であり、要素レベルでの誤差測度とメッシュパラメータの関係式を容易に導くことが出来るという利点がある。

本研究では、誤差ノルム $\boldsymbol{a}(\cdot,\cdot)$ を以下のように定義した。

$$\boldsymbol{a}(\cdot,\cdot) = \int_{\Omega^e} \sigma(\cdot)\,\varepsilon(\cdot)\,\mathrm{d}\Omega \tag{3}$$

ここで、$\sigma(\cdot)$、$\varepsilon(\cdot)$ は流速ベクトル $\boldsymbol{u}$ を用いて次のように書ける。

$$\begin{aligned} \sigma(\boldsymbol{u}) &= -p\boldsymbol{I} + 2\,\nu\,\varepsilon(\boldsymbol{u}) \\ \varepsilon(\boldsymbol{u}) &= \frac{1}{2}\{\nabla\boldsymbol{u} + (\nabla\boldsymbol{u})^T\} \end{aligned} \tag{4}$$

ノルムの観点から誤差測度 E_e は次のように書ける。

$$E_e = \sqrt{\mathbf{a}\left(\boldsymbol{u}_* - \boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{u}_* - \boldsymbol{u}_h\right)} \tag{5}$$

$\boldsymbol{u}_h$ は準厳密解、$\boldsymbol{u}_h$ は有限要素解である。厳密解 $\boldsymbol{u}$ の代わりに有限要素解 $\boldsymbol{u}_h$ から導出した近似値を用いて誤差測度を算出する。そして、解析領域全体におけるメッシュと解析解のクオリティーをはかる指標として、誤差ノルム率 (Quality Index) QI を次のように定義する [4]。

$$QI = E/E^{exp} \tag{6}$$

ここで、E、E^{exp} はそれぞれ

$$E = \sqrt{\sum_{e=1}^{ne} E_e^2}, \qquad E^{exp} = \sqrt{\sum_{e=1}^{ne} \boldsymbol{a}_e(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{u}_h)} \tag{7}$$

であり、ne はアダプテーション直前の要素数である。E_e は Sobolev 空間 $\mathrm{H}^1(\Omega_e)$ のノルムそのものであるからアダプテーョン前後の比をとって、新しい要素サイズ h_e^{new} は補間誤差の関係式を変形をするこにより

$$h_e^{new} = h_e^{old}\left(\frac{QI_{aim}}{\sqrt{ne}}\frac{E^{exp}}{E_e}\right)^{1/k+r} \tag{8}$$

が任意の要素 e についてもとまる。ここで、k は要素形状の多項式次数、r はセミノルムのメッシュサイズの次数への寄与分であり、メッシュのコントロールを行うためのパラメータとして目的誤差ノルム率 QI_{aim} を用いる。

5　結果と考察

図-1 は、定常解を持つ円柱周りの流れにおける目的誤差ノルム率 QI_{aim} ごとの誤差ノルム率の収束の様子を示している。明かにそれぞれが目的誤差ノルム率近傍に収束していることが分かる。このことは正確なメッシュのコントロールを意味しており、誤差評価の妥当性を裏付けるものである。図-2 に、Cavity 内流れの解析結果を示す。Cavity 内流れにおいて問題になるのが、空間的な圧力の振動である。図-2 からも分かるように、圧力の振動はほとんど見られない。

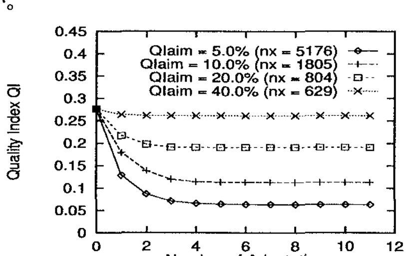
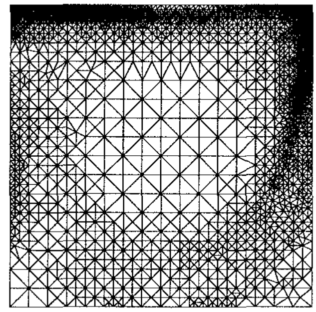
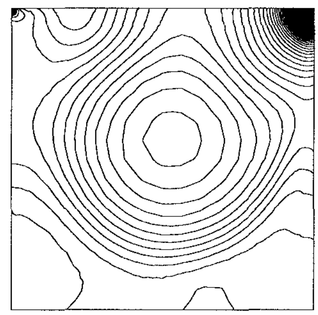


図-1 アダプテーョンごとの誤差ノルム率の変化



(a) 有限要素分割；節点数 = 4984、要素数 = 9518



(b) 圧力コンター図

図-2 7 度目のアダプテーション直後の解析結果
誤差ノルム率 = 18.9%、目的誤差ノルム率 = 10.0%

6　おわりに

本研究では非圧縮粘性流れ解析において、同次補間を用いた高効率な適合型有限要素法を提案した。正確なアダプティブ・メッシュ・コントロールの結果から、本研究で行った手法の各プロセスの妥当性が検討できた。今後の課題として、非定常流れ解析における最適なアダプティブ・プロセスの開発を進めて行く所存である。

参考文献

[1] J.Wu,J.Z.Zhu,J.Szmelter,O.C.Zienkiewicz,'Error estimation and adptivity in Navier–Stokes incompressible flows', Comp. Mech.,1990

[2] 丸岡, 太田, 平野, 川原,'同時補間を用いた陰的有限要素法による非圧縮粘性流れの解析', 構造工学論文集,Vol43A,pp.383-394,1997

[3] 林 正宏,' 分離型法を用いた非圧縮性流れの有限要素法解析に関する基礎的研究', 修士論文,1990

[4] 手塚 明, 菊池 昇, 日本機会学会論文集 (A 編),58 巻 555 号 (1992–11)