

I-A213

四角形要素による正規化気泡関数を用いた 非圧縮 Navier-Stokes 方程式の有限要素解析

八戸高専 正員 丸岡 晃
中央大学 学員 松本 純一
中央大学 正員 川原 睦人

1. はじめに

要素境界で0となり要素内のみで値を持つ気泡関数を一次要素に加えた気泡関数要素が、通常の Galerkin 法を用いた場合にある種の問題に安定化有限要素法^{2)~4)}と等価となる性質^{5),6)}が注目されている。山田⁷⁾は、非圧縮 Navier-Stokes 方程式に対して流速場に気泡関数要素を用い、圧力場に一次要素を用いた MINI 要素による混合型有限要素法の解析手法を提案した。しかしながら、気泡関数要素を用いた場合の代数方程式の未知数は、流速一変数あたり節点量と要素量の和となり一次要素に比べ増加する。二次元の一次要素である三角形要素は、要素量が節点量の約2倍となることから、節点量の約3倍に未知数が増える。三次元の四面体要素に拡張したときの未知数の増加は特に顕著になる。よって、計算効率の面で気泡関数要素を用いた手法は、安定化有限要素法等で行われている一次や双一次の同次補間による解析手法⁴⁾に比べ大規模な三次元解析などに適さないと考えられる。

そこで、本研究では、大規模な計算を効率よく行うことを目的とし、非圧縮 Navier-Stokes 方程式に対して流速場に四角形双一次要素における気泡関数要素を用い、圧力場に四角形双一次要素を用いた混合型有限要素法を適用した。また、離散化手法に計算効率の面を考慮にいれ、陰的解法に基づく分離型法を適用した。気泡関数には、四角形要素に適用した正規化気泡関数を用いた。二次元の四角形双一次要素は、要素量が節点量とほぼ等しくなり、未知数の増加が、三角形要素と比べ少なく見積もることができる。また、三次元の六面体要素への拡張が容易であり、未知数の増加が次元によらない利点がある。数値解析例として、Cavity 内の流れの問題を取り上げ、ここで提案する手法の適用性、有用性についての検討を行った。

2. 時間方向の離散化

基礎方程式は、非圧縮粘性流れに仮定し、非圧縮 Navier-Stokes 方程式を用いる。時間方向の離散化には、Crank-Nicolson 法を適用すると、運動方程式と連続式は以下ようになる。

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} + \nabla p^{n+1} - \nu \nabla^2 \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{0} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0 \quad (2)$$

ここで、 $\nu = 1/Re$ であり、 Re は、レイノルズ数である。また、 $\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n+1})$ 、 $\mathbf{u}^* = \frac{1}{2}(3\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1})$ である。移流速度の近似として $\mathbf{u}^*$ は、Adams-Bashforth 公式を用いる。

3. 分離型法と空間方向の離散化

式(1)と式(2)に対して、SMAC 法、SIMPLE 法、また、Hayashi らの A 法¹⁾に準じた分離型法を適用する。まず、式(1)の圧力を p^n に置き換えると、式(1)は、未知流速 $\mathbf{u}^{n+1}$ を中間流速 $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}$ に置き換えた次式になる。

$$\frac{\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}}^{n+\frac{1}{2}} + \nabla p^n - \nu \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{0} \quad (3)$$

式(1)と式(3)の差をとると、次式が得られる。

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}}{\Delta t} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^* \cdot \nabla (\mathbf{u}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) + \nabla (p^{n+1} - p^n) - \frac{1}{2} \nu \nabla^2 (\mathbf{u}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) = \mathbf{0} \quad (4)$$

式(4)の発散をとり、式(2)を代入することにより Poisson 方程式が得られる。ただし、 $\mathbf{u}^{n+1} \simeq \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}$ と近似し、ここでは、式(4)の第2,4項を省略する。

$$\Delta t \nabla^2 (p^{n+1} - p^n) = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \quad (5)$$

アルゴリズムは、式(3)⇒式(5)⇒式(4)となる。空間方向の離散化には、流速場の補間関数に気泡関数を四角形双一次要素に加えた気泡関数要素を用い、圧力場の補間関数に四角形双一次要素を用いた Galerkin 法による混合型有限要素法を適用する。

Key Words: 非圧縮 Navier-Stokes 方程式, 有限要素法, 四角形要素, 正規化気泡関数
〒039-1192 八戸市田面木字上野平 16-1 TEL:0178-27-2515, FAX:0178-27-9379

4. 正規化気泡関数

本研究では、気泡関数に関数形状を形状パラメータ ξ で制御できる正規化気泡関数 ϕ_e^ξ を用いる。このとき、次に定義する安定化パラメータ τ_e によって気泡関数の安定化作用の強さが表される⁶⁾。

$$\tau_e = \frac{\left\{ \int_{\Omega_e} \phi_e^\xi d\Omega \right\}^2}{\nu \int_{\Omega_e} (\nabla \phi_e^\xi)^2 d\Omega A_e} \quad (6)$$

ここで、 A_e は要素面積であり、 τ_e は安定化有限要素法^{2),3)}で現れる安定化パラメータに等価である⁶⁾。

本研究で用いる四角形要素に対する正規化気泡関数を以下に示す。図-1のようにアイソパラメトリック座標系 $\{r, s\}$ を用いて表した要素領域を4つの領域 ω_i に分割する。各領域ごとに $\{r, s\}$ を用いて次のように正規化気泡関数を定義する。

$$\phi_e^\xi = \begin{cases} \left(\frac{\xi+2}{\xi} \right) \{1 - (-r)^\xi\} & \text{in } \omega_1 \\ \left(\frac{\xi+2}{\xi} \right) \{1 - (-s)^\xi\} & \text{in } \omega_2 \\ \left(\frac{\xi+2}{\xi} \right) \{1 - (+r)^\xi\} & \text{in } \omega_3 \\ \left(\frac{\xi+2}{\xi} \right) \{1 - (+s)^\xi\} & \text{in } \omega_4 \end{cases} \quad (7)$$

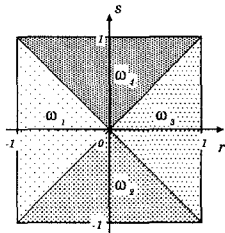


図-1 要素領域

τ_e は、 ξ の関数として次のように表せる。

$$\tau_e = \frac{A_e^2}{8\nu g} \frac{\xi}{(\xi+2)^2} \quad (8)$$

ここで、 $g = |\mathbf{x}_r|^2 + |\mathbf{x}_s|^2$ である。本研究では、要素ごとの積分に、アイソパラメトリック座標系 $\{r, s\}$ によって表されたヤコビアンを中心のみ $\{0, 0\}$ で評価し、その他の積分を解析的に行う方法を用いる⁹⁾。

形状パラメータ ξ は、次の条件によりの決定する。

$$\alpha = \frac{|\mathbf{u}_h| h_e}{2\nu}, \quad \beta = \alpha \frac{A_e^2}{2h_e^2 g},$$

$$\xi = \begin{cases} 2, & \beta < 8 \\ \frac{1}{2} \{ \beta - 4 - \sqrt{\beta(\beta - 8)} \}, & \beta \geq 8 \end{cases} \quad (9)$$

5. 数値解析例

数値解析例として、 $Re = 400$ のCavity内の流れの解析を行った。有限要素分割は、図-2に示す 32×32 の均等分割および不均等分割である。時間増分は $0.001, 0.01$ とした。本研究で用いている分離型法のアルゴリズムでは、文献¹⁰⁾で指摘している同次補間を用いた場合の分離型法において問題とされる解の時間増分に対する依存性が見られなかった。これは、解の安定化の作用をする式(5)の左辺項が定常解に収束した場合に消去されるからである。図-3に $\Delta t = 0.001$ の場合の圧力コンター図を示す。本解析結果は、どちらの要素分割においても圧力の振動が発生しておらず、四角形双一次要素における気泡関数の安定化作用の効果があることが確認できる。

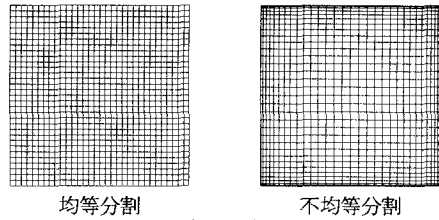


図-2 有限要素分割図

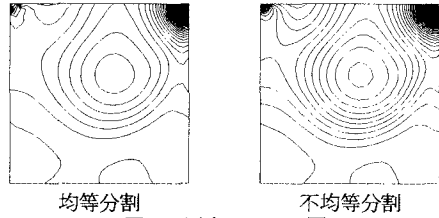


図-3 圧力コンター図

参考文献

- 1) M. Hayashi, K. Hatanaka and M. Kawahara, Int. J. Num. Meth. Fluids, Vol.13, pp.805-840, (1991).
- 2) A.N. Brooks and T.J.R. Hughes, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 32 pp.199-259, (1982).
- 3) T.J.R. Hughes, L.P. Franca and M. Balestra, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 59, pp.85-99, (1986).
- 4) T.E. Tezduyar, S. Mittal, S.E. Ray and R. Shih, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 95, pp.221-242, (1992).
- 5) F. Brezzi, M.-O. Bristeau, L.P. Franca, M. Mallet and G. Roge, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 96, pp.117-129, (1992).
- 6) 山田, 計算工学講演会論文集, Vol.1, pp.167-170, (1996).
- 7) 山田, 計算工学講演会論文集, Vol.2, pp.411-414, (1997).
- 8) R. Pierre, SIAM J. Num. Anal., Vol.32, pp.1210-1224, (1995).
- 9) 棚橋, アイビーシー, 第6章, pp.735-768, (1992).
- 10) 丸岡, 太田, 平野, 川原, 構造工学論文集, Vol.43A, pp.383-394, 1997.