土木学会第53回年次学術講演会（平成10年10月）

I－A211

相似形メッシュを持つ系の解析に関する一手法

○熊本工業大学　正　員　平井一男
八代高専　　　　　　内山義博
九州産業大学　正　員　水田洋司

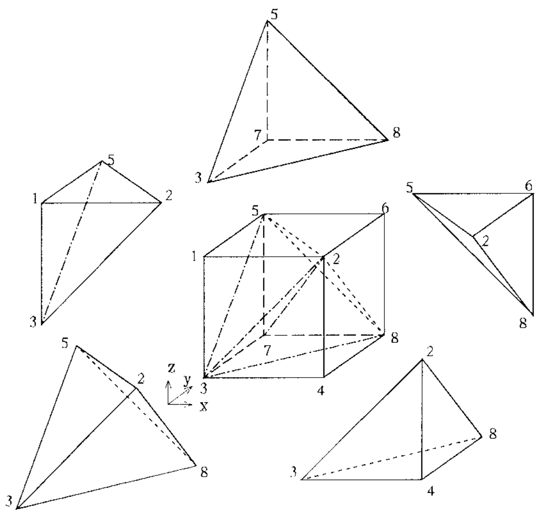
1．はじめに

応力集中問題等で、応力勾配が急変するところのメッシュ分割を細かくするのは当然であるが、集中部以外もかなり細分割する必要がある。これに伴い、計算機の容量、計算時間は増大する。このとき与系の不規則な部分は他の手法（ズーム法等）で解析すると、系の大部分はある規則的なメッシュで分割できる。ここでは、この規則的なメッシュ部分についての節点消去を便利に行う手法について述べる。

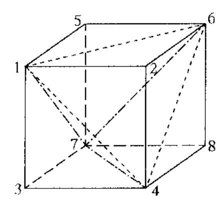
2．立体メッシュ

2.1 六面体ユニット

基本的な要素としては四面体要素（三角錐）を用いるが、実際の解析に当っては、系を要素分割する際の容易さ、入力データ量の軽減、また系の対称性の観点から直方体要素（六面体）として扱う方が便利である。ここでは、四面体5個で構成される六面体をユニット要素として考える。直方体は、図－1のごとく最少5個の三角錘で作成できる。図示分割状態を正メッシュとし、正メッシュよりなる六面体をシングルユニットとする。しかしこの正メッシュで作成したシングルユニットは対称ではなく実解析において、対称荷重、例えば単純支持，一様引っ張りの問題でも反力、応力ともに対称にならない。これを避ける為に、図－2の様なY軸に対して90°回転した逆メッシュよりなる逆ユニットを作成し、これと先のシングルユニットとを重ね合わせ平均したダブルユニットを用いる。つまり、正メッシュ5個、逆メッシュ5個合計10個で構成された六面体がダブルユニットであり、ダブルユニットを用いれば、上記の対称性の問題は解決できる。剛性マトリックスなどに関する以下の議論では、ダブルユニットについて検討する。



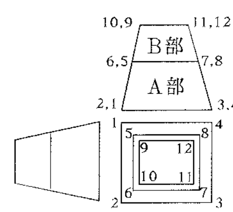
図－1 正メッシュより構成された6面体



図－2 逆メッシュより構成された6面体

2.2 相似形ユニットの剛性比

図－3モデルAの剛性マトリックスについて検討する。モデルAはA部、B部の寸法比が0.8、つまり相似比$\alpha=0.8$、その逆数$r=1/\alpha=1.25$である。作成したA部，B部の剛性マトリックスの要素比（k_B/k_A）は、全要素について一定で$k_A/k_B=1.25$であり、B部の剛性マトリックスは$K_B=rK_A$とA部の剛性マトリックスK_Aをr倍すれば得られる。また、この2ユニットの(9,10,11,12)面を底面とし更に同じ相似比で2層積み上げたモデルつまり4層モデルで、上下2層に対する剛性マトリックスの要素比についても、一様に$k_{上}/k_{下}=1.5625(=1/0.64)$であり、$K_{上}$は$K_{下}$を相似比0.64（$=0.8^2$）の逆数倍すれば得られる。



図－3 モデルA

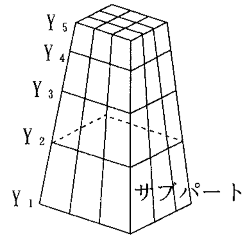
キーワード　　相似形メッシュ　　サブパート　　縮合
連絡先（〒866-0082　熊本市池田4丁目22番1号・TEL 096-326-3111・Fax 096-326-3000）

3．解析法

3．1 相似系の剛性マトリックス

相似メッシュで分割された図－4に示す様な構造物の立体解析を考える。任意に分割された最下層をサブパートとし、残り縦3層はサブパートと相似に、相似比αで分割されている。サブパートの剛性マトリックス（サブマトリックス）を式(1)とすると、2～4層目の剛性マトリックスは次のようにサブマトリックス$\mathbb{K}_s$と相似比の逆数rとの積で表される。$\mathbb{K}_2=r\mathbb{K}_s$, $\mathbb{K}_3=r^2\mathbb{K}_s$, $\mathbb{K}_4=r^3\mathbb{K}_s$。

$$\mathbb{K}_s=\begin{array}{c}\begin{matrix}Y_1 & Y_2\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}\mathbb{K}_{11} & \mathbb{K}_{12}\\ \mathbb{K}_{21} & \mathbb{K}_{22}\end{bmatrix}\end{array}\quad\cdots(1)$$



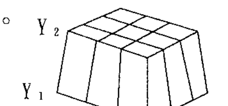
図－4 モデルB

従って、系全体の剛性マトリックスは、これらを重ね合わせればよく次式となる。

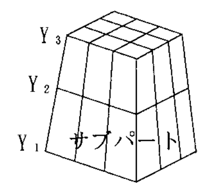
$$\mathbb{K}=\begin{bmatrix}\mathbb{K}_{11} & \mathbb{K}_{12} & 0 & 0 & 0\\ \mathbb{K}_{21} & \mathbb{K}_{22}+r\mathbb{K}_{11} & r\mathbb{K}_{12} & 0 & 0\\ 0 & r\mathbb{K}_{21} & r\mathbb{K}_{22}+r^2\mathbb{K}_{11} & r^2\mathbb{K}_{12} & 0\\ 0 & 0 & r^2\mathbb{K}_{21} & r^2\mathbb{K}_{22}+r^3\mathbb{K}_{11} & r^3\mathbb{K}_{12}\\ 0 & 0 & 0 & r^3\mathbb{K}_{21} & r^3\mathbb{K}_{22}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{array}{c}\begin{matrix}Y_1 & \quad Y_2 & \quad Y_3 & \quad Y_4 & \quad Y_5\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}\mathbb{K}_{11} & \mathbb{K}_{12} & 0 & 0 & 0\\ \mathbb{K}_{21} & \overline{\mathbb{K}}_{22} & r\mathbb{K}_{12} & 0 & 0\\ 0 & r\mathbb{K}_{21} & r\overline{\mathbb{K}}_{22} & r^2\mathbb{K}_{12} & 0\\ 0 & 0 & r^2\mathbb{K}_{21} & r^2\overline{\mathbb{K}}_{22} & r^3\mathbb{K}_{12}\\ 0 & 0 & 0 & r^3\mathbb{K}_{21} & r^3\mathbb{K}_{22}\end{bmatrix}\end{array}\quad\cdots(2)$$

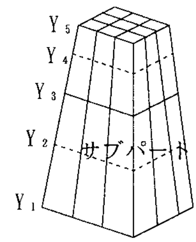
ただし、$\overline{\mathbb{K}}_{22}=\mathbb{K}_{22}+r\mathbb{K}_{11}$である。



図－5 サブパート



図－6 縮合ユニット



図－7 偶数行消去

3.2 マトリックスの消去・縮合

今、中間節点を全て消去して、上下端すなわちY_1、Y_5行に縮合することを考える。このとき、常に一行おきに消去を行えば以下のごとく非常に便利に消去・縮合が行える。なお、ここでは縦4分割としているが、縦分割が2^p($p=1,2,\cdots$)であればいくらでもよい。

縮合ユニット（系の下2層）の剛性マトリックス$\mathbb{K}_u$は、$\mathbb{K}_s$とrで表され式(3)で、またY_2行を消去した後のマトリックス${}_c\mathbb{K}_u$は式(4)となる。

$$\mathbb{K}_u=\begin{array}{c}\begin{matrix}Y_1 & \quad Y_2 & \quad Y_3\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}\mathbb{K}_{11} & \mathbb{K}_{12} & 0\\ \mathbb{K}_{21} & \overline{\mathbb{K}}_{22} & r\mathbb{K}_{12}\\ 0 & r\mathbb{K}_{21} & r\mathbb{K}_{22}\end{bmatrix}\end{array}\quad\cdots(3)$$

$${}_c\mathbb{K}_u=\begin{array}{c}\begin{matrix}Y_1 & Y_3\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}\tilde{\mathbb{K}}_{11} & \tilde{\mathbb{K}}_{12}\\ \tilde{\mathbb{K}}_{21} & \tilde{\mathbb{K}}_{22}\end{bmatrix}\end{array}=\begin{array}{c}\begin{matrix}Y_1 & \qquad\qquad Y_3\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}\mathbb{K}_{11}-\mathbb{K}_{12}\overline{\mathbb{K}}_{22}^{-1}\mathbb{K}_{21} & -r\mathbb{K}_{12}\overline{\mathbb{K}}_{22}^{-1}\mathbb{K}_{12}\\ -r\mathbb{K}_{21}\overline{\mathbb{K}}_{22}^{-1}\mathbb{K}_{21} & r\mathbb{K}_{22}-r^2\mathbb{K}_{21}\overline{\mathbb{K}}_{22}^{-1}\mathbb{K}_{12}\end{bmatrix}\end{array}\quad\cdots(4)$$

一方、上2層の剛性マトリックス$\mathbb{K}_2$は式(5)に示すように$\mathbb{K}_2=r^2\mathbb{K}_u$であるから、$Y_4$行消去後の縮合マトリックスは

$$\mathbb{K}_2=\begin{array}{c}\begin{matrix}Y_3 & \quad Y_4 & \quad Y_5\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}r^2\mathbb{K}_{11} & r^2\mathbb{K}_{12} & 0\\ r^2\mathbb{K}_{21} & r^2\overline{\mathbb{K}}_{22} & r^3\mathbb{K}_{12}\\ 0 & r^3\mathbb{K}_{21} & r^3\mathbb{K}_{22}\end{bmatrix}\end{array}=r^2\begin{array}{c}\begin{matrix}Y_3 & \quad Y_4 & \quad Y_5\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}\mathbb{K}_{11} & \mathbb{K}_{12} & 0\\ \mathbb{K}_{21} & \overline{\mathbb{K}}_{22} & r\mathbb{K}_{12}\\ 0 & r\mathbb{K}_{21} & r\mathbb{K}_{22}\end{bmatrix}\end{array}=r^2\mathbb{K}_u\quad\cdots(5)$$

${}_c\mathbb{K}_2=r^2{}_c\mathbb{K}_u$となり先の${}_c\mathbb{K}_u$と$r$の累乗積で表され、再消去の必要はない。更に縦分割数が多い場合も、例えば$\mathbb{K}_3=r^4\mathbb{K}_u$, ${}_c\mathbb{K}_3=r^4{}_c\mathbb{K}_u$と中間行を消去・縮合したマトリックスは、やはり${}_c\mathbb{K}_u$と$r$の累乗積で表される。縮合されたマトリックス${}_c\mathbb{K}_u$を新しいサブパート$\mathbb{K}_s$として式(3)に適用、縮合ユニットを作成すると図－7に示すように偶数行が消去された系の剛性マトリックスとなり、式(4)を適用すれば得られたマトリックスは中間節点を全て消去、Y_1, Y_5行に縮合されたマトリックスとなる。従って、各段階での縮合ユニットの$\mathbb{K}_u$を求めこれに対してのみ消去・縮合を行えばよく、縦分割数が2^pの場合はp回同様な操作を繰り返せば上下端に縮合出来る。更に$\mathbb{K}_u$は$\mathbb{K}_s$で表せるから結局、各段階でのサブマトリックス$\mathbb{K}_s$さえ求めればよいことになり、計算容量の低減、計算時間の短縮が期待できる。尚、上下端の変位が求まれば中間行の変位は、先のルーチンを逆に行えば全て求める事ができる。