土木学会第53回年次学術講演会（平成10年10月）

I－A210

Waveletを用いた境界要素階層型 h-法

新潟大学大学院　学生会員　紅露　一寛
新潟大学　正会員　阿部　和久

1. はじめに

境界要素法などの近似解法の精度と計算効率を改善するために, 様々な適応分割法が提案されている. その中で階層型 h-法は, 粗い初期要素分割から計算を開始できる h-法の利点を兼ね備えているだけでなく, 再分割前の係数行列を次ステップでも使用できるため, 計算効率の改善も図ることができるといった特徴を有している. 従来の階層型 h-法においては, 簡単な多項式が基底関数として経験的に用いられてきた. 一方,Wavelet は局所的な support を有する直交関数であり, 関数系が階層構造を持つため階層型 h-法の基底関数として適すると考えられる.

そこで本研究では,Haar Wavelet を用いた境界要素階層型 h-法の構成を試みる. 解析例を通し, 本手法の有効性, 境界要素解の収束性について検討する.

2. Wavelet

Wavelet は, コンパクトな support を有し, 関数系全体として階層構造を持つ直交関数である. 本研究では, 直交 Wavelet の中で取り扱いが最も容易である Haar Wavelet を正規化して用いた.Haar Wavelet は次式の関数で与えられる.[1)]

$$\psi_{k,j}(x) = \begin{cases} 2^{\frac{k}{2}}, & 2^{-k}(j-1) < x < 2^{-k}(j-\frac{1}{2}) \\ -2^{\frac{k}{2}}, & 2^{-k}(j-\frac{1}{2}) \le x < 2^{-k}\cdot j \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases} \quad \cdots\cdots (1)$$

ここで,k は Wavelet 関数の階層レベル,j は support 位置をそれぞれ表わす指標である. この Haar Wavelet は, 同区間を support する区間一定関数とも直交する.

3. 解析手法の構成

2 次元ポテンシャル問題について考える. 直接法により定式化すると, 次式の境界積分方程式を得る.

$$c(x)u(x) = -\int_\Gamma q^*(x,y)u(y)\,d\Gamma_y + \int_\Gamma u^*(x,y)q(y)\,d\Gamma_y \qquad (x\in\Gamma) \cdots\cdots (2)$$

(2) の近似解は,(1) の Haar Wavelet と区間一定関数を補間関数として用い, 次式で定義する.

$$\tilde{u}(x) = \sum_{j=1}^{n_0}\hat{u}_{0,j}\phi_{0,j}(x) + \sum_{k=0}^{m}\sum_{j=1}^{n_k}\tilde{u}_{k,j}\psi_{k,j}(x), \qquad \tilde{q}(x) = \sum_{j=1}^{n_0}\hat{q}_{0,j}\phi_{0,j}(x) + \sum_{k=0}^{m}\sum_{j=1}^{n_k}\tilde{q}_{k,j}\psi_{k,j}(x) \cdots\cdots (3)$$

ここで,$\psi_{k,j}$は Haar Wavelet,$\phi_{0,j}$は最下位の階層レベルの Wavelet に対応する区間一定関数であり,$\hat{u}_{0,j},\hat{q}_{0,j},\tilde{u}_{k,j},\tilde{q}_{k,j}$ は Wavelet 係数である.

(3) を (2) に代入すると, 未知境界値の Wavelet 係数 $\mathbf{x}$ に対して, 次の連立方程式を得る.

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \cdots\cdots (4)$$

(4) を解き,(3) に基づき Wavelet 係数を再構成すると, 境界要素解が得られる.

本研究では, 各要素における近似度を表わす error indicator と境界要素解全体の精度を評価する error estimator は, 文献[2)]に示すものを用いた.

2 つの精度指標は, 残差 R_iに基づき構成する. ただし,R_iを厳密に評価することは不可能なので, 境界要素解とその高次補間とにより次式で近似評価する.

$$\tilde{R}_i = \sum_{j=1}^{N_e}\lambda_{ij} \qquad (i=1,\ldots,N) \cdots\cdots (5)$$

ここで,N_eは境界値が区間一定値となる部分境界要素数であり,λ_{ij}は次式の積分で与えられる.

Key words : ウェーブレット, 境界要素法, 階層型 h-法, 適応分割
連絡先 : 〒 950-2181　新潟市五十嵐二の町 8050 番地　TEL (025) 262-7028　FAX (025) 262-7021

$$\lambda_{ij} = -\int_{\Gamma_j} q^*(\hat{u} - \tilde{u})\, d\Gamma + \int_{\Gamma_j} u^*(\hat{q} - \tilde{q})\, d\Gamma \cdots\cdots (6)$$

なお,$\hat{u},\hat{q}$ は, 境界要素解$\tilde{u},\tilde{q}$ を高次の多項式で補間して得られる関数である.

error indicator λ_j と境界要素の分割判定条件は, 次式に基づき定義し, その条件に該当する要素を 2 等分割する.

$$\lambda_j = \max\{|\lambda_{ij}|, i = 1,\ldots,N\}, \qquad \lambda_j \geq \beta \cdot \max\{\lambda_j\} \cdots\cdots (7)$$

ここで,β は $0 < \beta \leq 1$ なるパラメータである.

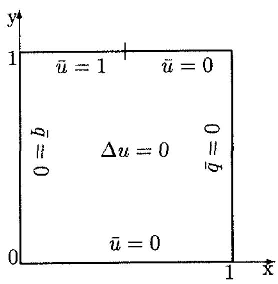
また,error estimator η は次式で定義する.

$$\eta = \sum_{j=1}^{N_e} L_j \lambda_j \cdots\cdots (8)$$

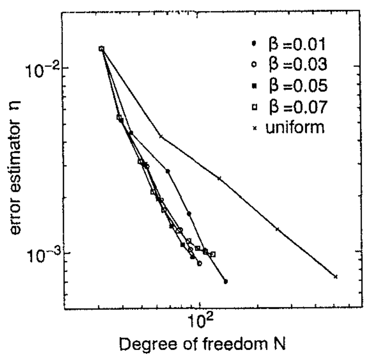
ここで,L_j はλ_j に対応する部分境界要素長である.η が所定の収束判定値ε を下回った時点で適応分割過程を終了する.

4. 解析結果による本手法の有効性の検討

図–1 に示すような,$(x = 0.5, y = 1)$ に特異性を有する 2 次元ポテンシャル混合境界値問題に対して本手法を適用し, その有効性について検討を加えた. なお, 収束判定値は$\varepsilon = 1.0 \times 10^{-3}$と設定し, パラメータ$\beta$の値として$\beta = 0.01, 0.03, 0.05, 0.07$ の 4 通りを検討した. さらに比較のために等分割・一定要素境界要素法において同様の条件で計算を行なった.



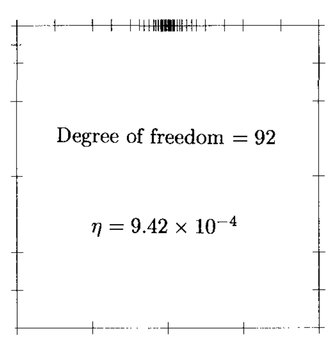
図–1 解析条件



図–2 ηの収束状況

表–1 繰り返し回数・最終自由度に対する β の影響 $(\varepsilon = 1.0 \times 10^{-3})$

β	Step	N
0.01	6	137
0.03	7	100
0.05	7	92
0.07	10	118



図–3 最終ステップにおける要素分割 $(\varepsilon = 1.0 \times 10^{-3}, \beta = 0.05)$

図–2 は, 本事例におけるη の収束状況を示したものである. また, 各解析において得たステップ数と最終的な自由度 N を**表–1** に示す. **図–2** に示すようにすべての場合において解は一様に収束しているが, 階層型 h-法を採用した場合, 収束の速さは等分割の場合に比べて著しく速く, 所定の精度を得るために必要となる要素数は等分割の場合の約 1/5 に抑えられていることがわかる. さらに, **表–1** の結果から, 本問題では,$\beta = 0.05$ の場合に自由度が最小になることがわかる. 一方, ステップ数についてはβの値の変化に伴う影響はほとんど認められなかった. また, **図–4** に$\beta = 0.05$ の場合の要素の最終分割状況を示す. 境界値の特異点近傍に局所的に境界要素が配置され, 本手法の error indicator が有効に機能していることが確認できる.

以上の解析結果より, 本研究で提案した階層型 h-法は境界要素法の適用に対して有効であることが確かめられた.

参考文献

1) J.R.Williams,K.Amaratunga:Introduction to wavelets in engineering,Int.J.Num.Meth.Engng., Vol.37,pp.2365-2388,1994.
2) K.Abe: A new residue and nodal error evaluation in h-adaptive boundary element method,Adv.Engng.Softw.,15,pp.231-239,1992.