土木学会第53回年次学術講演会（平成10年10月）

# I－A182 高速多重極境界要素法による3次元静弾性問題の解析

福井大学工学部　学生員　○　玖津見 敏広
福井大学工学部　正会員　　　福 井 卓 雄

## 1 はじめに

従来の境界要素法では，離散化による線形代数方程式の係数が密行列となる。このため，大規模な問題では問題の自由度 $N$ に対して必要記憶容量が $O(N^2)$，計算量が $O(N^2)\sim O(N^3)$ となり，解析が困難であった。この解決策として，これまでに著者らは高速多重極法 [1] を利用した高速多重極境界要素法 [2] を提案し，また最近の研究では3次元ポテンシャル問題についても高速多重極境界要素法を用いて効率良く計算できることがわかっている。ここでは弾性場を調和関数で表現することによって,3次元ポテンシャル問題と同様に3次元静弾性問題の高速多重極法を構成し，境界要素法に適用する。

## 2 3次元静弾性問題の境界要素法

3次元空間中の領域 $B$ とその境界 $\partial B$ を考える。変位 $\boldsymbol{u}$ が領域内で Navier の方程式を満足し，境界上で与えられた境界条件を満足するとする。境界値問題は次のようになる。

$$G\left[u_{i,jj}+\frac{1}{1-2\nu}u_{j,ji}\right]+X_i=0 \quad \text{in } B, \qquad u_i=\hat{u}_i \quad \text{on } \partial B_1, \qquad T_{ij}u_j=\hat{s}_i \quad \text{on } \partial B_2 \tag{1}$$

ここに，$\boldsymbol{X}$ は物体力，$G$ はせん断弾性係数，$\nu$ は Poisson 比，$T_{ij}u_j$ は境界上の応力ベクトルである。Somigliana の公式により，境界積分方程式は

$$C_{ij}(\boldsymbol{x})u_j(\boldsymbol{x})=\int_{\partial B}G_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})T_{jk}u_k(\boldsymbol{y})\,dS_y-\int_{\partial B}S_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})u_j(\boldsymbol{y})\,dS_y \tag{2}$$

となる。Navier の方程式 (1) の基本特異解および第2基本特異解は次のように与えられる。

$$G_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\frac{1}{4\pi G}\left[\frac{\delta_{ij}}{r}+\frac{1}{4(1-\nu)}r_{,ij}\right], \qquad S_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=T^y_{jk}G_{ki}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \tag{3}$$

また,$\boldsymbol{C}$ は点 $\boldsymbol{x}$ の位置に依存するパラメータで，$\boldsymbol{x}$ が領域内のとき $\boldsymbol{C=1}$，領域外のとき $\boldsymbol{C=0}$，滑らかな境界上にあるとき $\boldsymbol{C=1/2}$ の値をとる。式 (2) の離散化により導かれる線形代数方程式の係数は密行列である。この密行列方程式を解くための計算を高速化するために，(2) の右辺の積分を以下で構成する高速多重極法を使って計算し，繰り返し解法を使って線形代数方程式を解く方法が高速多重極境界要素法である。

## 3 3次元静弾性問題の高速多重極法

3次元静弾性問題の高速多重極法を構成する場合に必要とされるものは，弾性場の多重極表現，多重極の移動・局所表現への変換にともなう係数の変換である。

弾性場の多重極表現は調和関数を使って考える。弾性場を調和関数で表せば,3次元ポテンシャル問題の高速多重極法 [1] を利用して効率良く3次元静弾性問題の高速多重極法を構成できるからである。弾性場を Neuber-Papkovich 関数 $\boldsymbol{\phi},\chi$ で表現すると，変位は $\kappa=3-4\nu$ として，

$$u_i=\frac{1}{2G}\left[\kappa\phi_i-x_j\phi_{j,i}-\chi_{,i}\right] \tag{4}$$

で与えられる。物体力の作用しない場合を考えると,$\boldsymbol{\phi}$, $\chi$ は調和関数であるから，それぞれの多重極展開を，$\boldsymbol{x}$ の極座標 $(r,\theta,\phi)$ を使って

$$\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\boldsymbol{M}_n^m\frac{Y_n^m(\theta,\phi)}{r^{n+1}}, \qquad \chi(\boldsymbol{x})=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}N_n^m\frac{Y_n^m(\theta,\phi)}{r^{n+1}} \tag{5}$$

---

キーワード：高速多重極境界要素法, Neuber-Papkovich 関数
連絡先：〒910-8507 福井市文京 3-9-1 福井大学工学部環境設計工学科, Tel. 0776-27-8596(直通), Fax. 0776-27-8746

と表現することができる。ここに，$Y_n^m$ は球面調和関数で Legendre の陪関数 $P_n^m$ を使って次式で定義する。

$$Y_n^m(\theta,\phi)=\sqrt{\frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}}P_n^{|m|}(\cos\theta)e^{im\phi} \tag{6}$$

多重極点の移動による係数の変換はポテンシャルの場合と同様に行なわれる。ただし，(4) の形が変換後も保存されるようにする必要がある。新しい多重極点から見た古い多重極の位置を $\boldsymbol{a}=(\rho,\alpha,\beta)$ とすると，新しい多重極の係数 $\tilde{\boldsymbol{M}}_j^k$, $\tilde{N}_j^k$ は古い多重極係数を使って

$$\tilde{\boldsymbol{M}}_j^k=\sum_{n=0}^{j}\sum_{m=-n}^{n}\Gamma_{jn}^{km}(\rho,\alpha,\beta)\boldsymbol{M}_{j-n}^{k-m},\qquad \tilde{N}_j^k=\sum_{n=0}^{j}\sum_{m=-n}^{n}\Gamma_{jn}^{km}(\rho,\alpha,\beta)N_{j-n}^{k-m}-\boldsymbol{a}\cdot\tilde{\boldsymbol{M}}_j^k \tag{7}$$

のように表される。ここに，$\Gamma_{jn}^{km}$ はポテンシャル問題における係数の変換に現れるものと同じものである [1]。原点に作用する集中荷重による基本特異解 (3) の場は$\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{X}/8\pi(1-\nu)r$, $\chi(\boldsymbol{x})=0$ で表せるから，(7) を使えば，$G_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})X_j$ の多重極展開の係数は

$$\boldsymbol{M}_n^m=\frac{\boldsymbol{X}}{8\pi(1-\nu)}\rho^nY_n^{-m}(\alpha,\beta),\qquad N_n^m=\frac{-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{X}}{8\pi(1-\nu)}\rho^nY_n^{-m}(\alpha,\beta) \tag{8}$$

となる。同様に，局所展開を

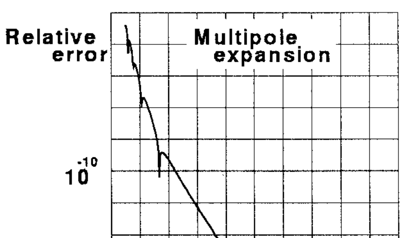
$$\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\boldsymbol{K}_n^m r^nY_n^m(\theta,\phi),\qquad \chi(\boldsymbol{x})=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}L_n^m r^nY_n^m(\theta,\phi) \tag{9}$$

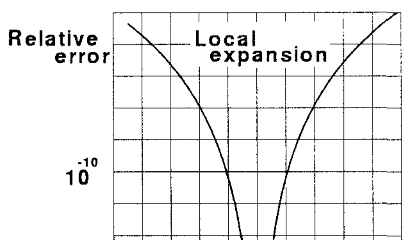
で表せば，多重極から局所展開への変換，および局所展開間の変換は

$$\boldsymbol{K}_j^k=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\Omega_{jn}^{km}(\rho,\alpha,\beta)\boldsymbol{M}_n^m,\qquad L_j^k=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\Omega_{jn}^{km}(\rho,\alpha,\beta)N_n^m-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{K}_j^k \tag{10}$$

$$\tilde{\boldsymbol{K}}_j^k=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\Lambda_{jn}^{km}(\rho,\alpha,\beta)\boldsymbol{K}_n^m,\qquad \tilde{L}_j^k=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\Lambda_{jn}^{km}(\rho,\alpha,\beta)L_n^m-\boldsymbol{a}\cdot\tilde{\boldsymbol{K}}_j^k \tag{11}$$

となる。ここに，$\Omega_{jn}^{km}$, $\Lambda_{jn}^{km}$ はポテンシャル問題における変換を表す。




上の図はそれぞれ係数変換式 (7) による係数を使った多重極展開 (5) と係数変換式 (11) による係数を使った局所展開 (9) とによって$\phi,\chi$を求め，式 (4) を使って求めた変位の正解との相対誤差である。ここで，項数は 15 までとった。多重極展開では荷重点（原点）から離れた位置，局所展開では展開点（$r=10$）付近でそれぞれ誤差が小さくなり，変位が正確に計算されていることがわかる。高速多重極法の性格を考慮すれば，これらの展開は高速多重極法を構成するのに十分である。この方法は 3 次元ポテンシャル問題の高速多重極法を応用しているから，ポテンシャルの場合と同様に必要記憶容量・計算量をともに減少させることができ，効率良く境界積分方程式 (2) を解くことが可能となる。

## 参考文献

[1] Greengard, L.: A short cource on fast multipole methods. *Lecture Notes, VIIth EPSRC Numerical Analysis Summer School, Leicester University, U.K., 8th-19th July*, 1996.

[2] 福井卓雄，持田哲郎：高速多重極境界要素法の 2 次元静弾性問題への応用，境界要素法論文集，**13** pp. 131–136, 1996.