

## I-A179

## 四辺固定, クロス・プライ積層矩形板の厳密解法

大阪市立大学工学部 正会員 小林 治俊  
川崎重工業 (株) 田中 誠  
Lancaster University, UK G. J. Turvey

## 1. まえがき

横せん断変形の影響を考慮した積層板の解析が盛んに行われているが、その大部分はFEM解析によるものであり、また解析的研究のほとんどは四辺単純支持板か相対二辺単純支持板に限られている[1]。その中で実用性の高い四辺固定板に対してKabir-Chaudhuri [2]は3つの変位成分を周辺条件を満足する2重フーリエ級数表示し、支配式より直接フーリエ級数に含まれる未定定数から成る無限連立方程式を導き数値計算を行っているが、結果には不明確なところがある。本研究は、四辺固定クロス・プライ積層板を対象に、Kobayashi-Turvey [3]が導いた変位関数から得られるフーリエ単級数解を用いて、図-1に示す重ね合わせの方法により解析解を求めたものである。

## 2. 基礎式

(1) つり合い式：一次せん断変形理論による対称クロス・プライ積層板のつり合い式は次式で表される。

$$\begin{Bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_x \\ \psi_y \\ w \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ q \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} L_{11}=D_{11}\partial_x^2+D_{66}\partial_y^2-\kappa A_{55}, & L_{12}=(D_{12}+D_{66})\partial_x\partial_y, & L_{13}=-\kappa A_{55}\partial_x \\ L_{21}=L_{12}, & L_{22}=D_{66}\partial_x^2+D_{22}\partial_y^2-\kappa A_{44}, & L_{23}=-\kappa A_{44}\partial_y \\ L_{31}=-L_{13}, & L_{32}=-L_{23}, & L_{33}=\kappa A_{55}\partial_x^2+\kappa A_{44}\partial_y^2 \end{Bmatrix} \quad (1), (2)$$

ここに、 $(\psi_x, \psi_y, w)$  は回転角とたわみ； $(m_x, m_y, q)$  はモーメント荷重と鉛直荷重； $L_{ij}$  は微分演算子； $D_{ij}$  ( $A_{44}, A_{55}$ ) は曲げとせん断剛性； $\kappa$  ( $=5/6$ ) はせん断修正係数；記号  $\partial_x, \partial_y$  などは偏微分  $\partial_x = \partial/\partial x, \partial_y^2 = \partial^2/\partial y^2$  などを意味する。なお、断面力の表示式は省略した。この支配式の一般解は微分演算法により以下のように求められる[3]。

(2) 特解：  $\det(L_{ij})\phi_i = -m_x, \det(L_{ij})\phi_2 = -m_y, \det(L_{ij})\phi_3 = -q$  (3)

を満たすような3つの変位関数  $\phi_i$  ( $i=1,2,3$ ) が与えられたとすれば、特解  $\psi_x^{(p)}, \psi_y^{(p)}, w^{(p)}$  は次式より得られる。

$$\psi_x^{(p)} = M_{11}\phi_1 + M_{21}\phi_2 + M_{31}\phi_3, \quad \psi_y^{(p)} = M_{12}\phi_1 + M_{22}\phi_2 + M_{32}\phi_3, \quad w^{(p)} = M_{13}\phi_1 + M_{23}\phi_2 + M_{33}\phi_3 \quad (4)$$

$M_{ij}$  は行列  $(L_{ij})$  の余因子で、 $\det(L_{ij})$  の具体的表示は次のようになる (係数  $C_i$  の内容は省略)。

$$\det(L_{ij}) = C_1\partial_x^6 + C_2\partial_x^4\partial_y^2 + C_3\partial_x^2\partial_y^4 + C_4\partial_x^4 + C_5\partial_x^2 + C_6\partial_x^2\partial_y^2 + C_7\partial_y^4 \quad (5)$$

(3) 同次解：次の式(6)を満たす関数  $\phi$  を用いると、同次解  $\psi_x^{(h)}, \psi_y^{(h)}, w^{(h)}$  は式(7)で与えられる。

$$\det(L_{ij})\phi = 0, \quad [\psi_x^{(h)}, \psi_y^{(h)}, w^{(h)}] = \varepsilon_i [M_{1i}, M_{2i}, M_{3i}] \phi \quad (i=1,2,3) \quad (6), (7)$$

$\varepsilon_i$  は任意定数で、例えば  $\varepsilon_3=1$  ( $i=3$ ) にとれば、

$$\begin{aligned} \psi_x^{(h)} &= \partial_x \{ \kappa A_{55} D_{66} \partial_x^2 + [\kappa A_{55} D_{22} - \kappa A_{44} (D_{12} + D_{66})] \partial_y^2 - \kappa^2 A_{44} A_{55} \} \phi, \\ \psi_y^{(h)} &= \partial_y \{ \kappa A_{44} D_{66} \partial_y^2 + [\kappa A_{44} D_{11} - \kappa A_{55} (D_{12} + D_{66})] \partial_x^2 - \kappa^2 A_{44} A_{55} \} \phi, \\ w^{(h)} &= [D_{11} D_{66} \partial_x^4 + (D_{11} D_{22} - 2 D_{12} D_{66} - D_{12}^2) \partial_x^2 \partial_y^2 + D_{22} D_{66} \partial_y^4 \\ &\quad - (\kappa A_{44} D_{11} + \kappa A_{55} D_{66}) \partial_x^2 - (\kappa A_{44} D_{66} + \kappa A_{55} D_{22}) \partial_y^2 + \kappa^2 A_{44} A_{55}] \phi \end{aligned} \quad (8)$$

## 3. 重ね合わせによる解析

ここでは等分布荷重  $q_0$  を受ける四辺固定板を取り扱う。図-1は重ね合わせの方法で解析するために必要な3つの載荷状態と座標系を示している。すなわち、Case 1: 等分布荷重が作用する四辺単純支持板、Case 2:  $x=\pm a/2$  で単純支持され、 $y=\pm b/2$  に縁モーメント  $\bar{M}_y = \sum_{m=1}^{\infty} M_m \cos(m\pi x/a)$  が作用する場合、Case 3:  $y=\pm b/2$  で単純支持され、 $x=\pm a/2$  に縁モーメント  $\bar{M}_x = \sum_{n=1}^{\infty} M_n \cos(n\pi y/b)$  が作用する場合である。これらの解は上述の変位関数を利用

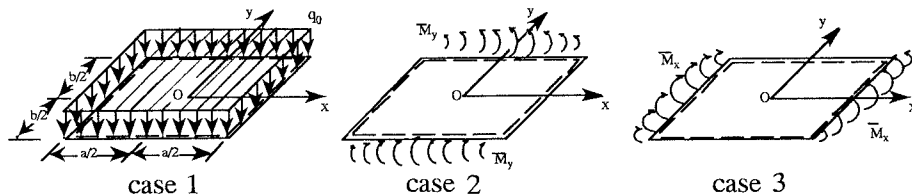


図-1 四辺固定板のはり合わせ

キーワード：クロス・プライ積層板、四辺固定矩形板、一次せん断変形理論、変位関数、級数解

連絡先：小林治俊、郵便番号 558-8585 大阪市住吉区杉本3-3-138、大阪市立大学工学部土木工学科、Tel/Fax (06)605-2723

すれば、一方向フーリエ級数形で求めることができる。これらの重ね合わせで各辺が固定されるための条件は、

$$x=\pm a/2 \text{ において } \psi_x=\psi_x^{(1)}+\psi_x^{(2)}+\psi_x^{(3)}=0, \quad y=\pm b/2 \text{ において } \psi_y=\psi_y^{(1)}+\psi_y^{(2)}+\psi_y^{(3)}=0 \quad (9), (10)$$

ただし上添字 (i) は各ケースを示す。これらの条件式に含まれる関数のフーリエ級数展開により、縁モーメントのフーリエ係数  $M_m$ ,  $M_n$  に関する無限連立方程式が得られ、これを解くことにより解が確定する。

#### 4. 数値計算例

材料には Graphite/epoxy を用い ( $E_1/E_2=25$ ,  $G_{12}/E_2=G_{13}/E_2=0.5$ ,  $G_{23}/E_2=0.2$ ,  $\nu_{12}=0.25$ ), また各層厚は等しいとした。図-2 は、板厚比や辺長比の変化に対する3層板 (0/90)  $s$  中央点のたわみと曲げモーメントであり、まえがきで述べた Kabir らの結果を図上にプロットした ( $w$ : $\times$ ,  $M_x$ : $\circ$ ,  $M_y$ : $\bullet$ )。図より本結果と Kabir らの結果には矩形板 ( $b/a \neq 1$ ) において明らかに差異が認められる。正方形板においても、左図で  $a/h=10$  の場合と右図で  $b/a=1$  の場合の数値は当然一致すべきであるが Kabir らのものは一致していない。図-3 は、3層(0/90)  $s$ , 5層(0/90/0)  $s$ , 7層(0/90/0/90)  $s$  と層数を変化させた場合の正方形板のたわみ、曲げモーメント分布を示している。層数が増え、諸量は一定値に収斂する傾向があることが図から分かる。

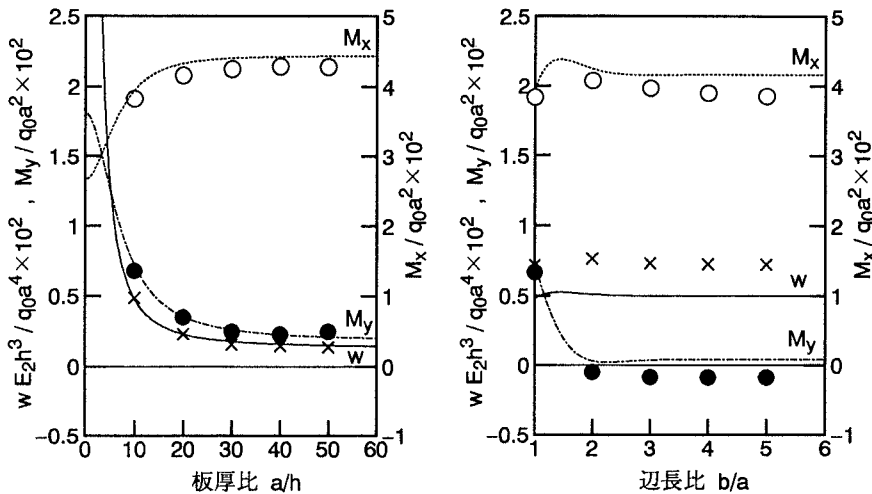


図-2 3層板中央点のたわみ、曲げモーメント ( $\times$ ,  $\circ$ ,  $\bullet$ : Kabir ら[2], 左図:  $b/a=1$ , 右図:  $a/h=10$ )

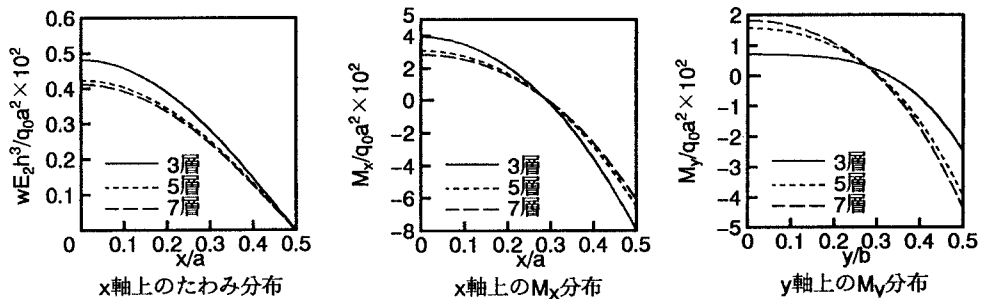


図-3 層数の変化によるたわみ、曲げモーメント分布 ( $b/a=1$ ,  $a/h=10$ )

#### 5. おわりに

四辺固定、クロス・プライン積層矩形板の厳密な取扱い方を示した。変位関数を導入して得られる単級数で表された各種の解を重ね合わせる本法は、単純支持、固定、自由を含む任意境界持つ積層矩形板に適用が可能である。

#### 参考文献

- [1] Chen, W. C. and Liu, W. H.(1990) Deflections and free vibrations of laminated plates: Levy-type solutions, Int. J. Mech. Sci., 32(9)779-793. [2] Kabir, H. R. H. and Chaudhuri, R. A.(1991) A generalized Navier's approach for solution of clamped moderately-thick cross-ply plates, Composite Struct., 17(4)351-361. [3] Kobayashi, H. and Turvey, G. J.(1992) Displacement functions for symmetrically laminated rectangular plates with shear deformation, Proc. of Annual Meeting of Kansai Chapter, JSCE, I-85.