I－A177　物体力が有る直交異方性体の３次元弾性解について

北見工業大学　フェロー　奥村　勇

1．まえがき　異方性体の３次元弾性解は、その理論が早くに確立しているにもかかわらず、異方性体の部類によっては、必ずしも、多くは見出されていない。横等方性体に対する解は、Elliott, Lodge 及び Lekhnitskii が早くに求めているが、直交異方性体に対する解は、Hata[1] 及び Sonoda 及び Horikawa[2] の解を著者は知るのみである。Hata は、演算子を用いて、変位のつり合い方程式を解き、１つの変位ポテンシャルで表さられた解を求めている。Sonoda 及び Horikawa は、Hata の解法を物体力が有る場合に拡張し、３つの物体力が独立な場合についての解を、３つの解の重ね合わせにより求めている。

本研究は、３つの変位ポテンシャルを用いて、任意の物体力が有る直交異方性体の３次元弾性解を求めるものである。本研究における解は、３つの物体力を３つの係数がかかった温度に置き換えると、そのまま、直交異方性体の熱弾性ポテンシャルに還元する。

2．直交異方性体の応力－ひずみ関係　直交異方性体の応力－ひずみ関係は、次式となる。

$$\sigma_{xx}=c_{11}\varepsilon_{xx}+c_{12}\varepsilon_{yy}+c_{13}\varepsilon_{zz}\ ,\ \sigma_{yy}=c_{12}\varepsilon_{xx}+c_{22}\varepsilon_{yy}+c_{23}\varepsilon_{zz}\ ,\ \sigma_{zz}=c_{13}\varepsilon_{xx}+c_{23}\varepsilon_{yy}++c_{33}\varepsilon_{zz} \qquad (1\,\mathrm{a-c})$$

$$\sigma_{yz}=2c_{44}\varepsilon_{yz}\ ,\ \sigma_{zx}=2c_{55}\varepsilon_{zx}\ ,\ \sigma_{xy}=2c_{66}\varepsilon_{xy} \qquad (1\,\mathrm{d-f})$$

ここで、σ_{ij}, ε_{ij} 及び c_{ij} は、それぞれ、直交座標における応力成分、ひずみ成分及び弾性定数を表す。

3．変位のつり合い方程式　応力－ひずみ関係（１ａ－ｆ）を変位成分で表し、それを応力のつり合い方程式に代入すると、変位のつり合い方程式が次の様に得られる。

$$c_{11}\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+c_{66}\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+c_{55}\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}+(c_{12}+c_{66})\frac{\partial^2 u_y}{\partial x\partial y}+(c_{13}+c_{55})\frac{\partial^2 u_z}{\partial x\partial z}+b_x=0 \qquad (2\,\mathrm{a})$$

$$(c_{12}+c_{66})\frac{\partial^2 u_x}{\partial x\partial y}+c_{66}\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}+c_{22}\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}+c_{44}\frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}+(c_{23}+c_{44})\frac{\partial^2 u_z}{\partial y\partial z}+b_y=0 \qquad (2\,\mathrm{b})$$

$$(c_{13}+c_{55})\frac{\partial^2 u_x}{\partial x\partial z}+(c_{23}+c_{44})\frac{\partial^2 u_y}{\partial y\partial z}+c_{55}\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}+c_{44}\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}+c_{33}\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}+b_z=0 \qquad (2\,\mathrm{c})$$

ここで、u_i 及び b_i は、それぞれ、変位成分及び物体力を表す。

4．変位ポテンシャルの支配方程式　３つの変位成分を３つの変位ポテンシャル ϕ, ψ_1 及び ψ_2 により次の様に表示する。

$$u_x=\frac{\partial\phi}{\partial x},\ u_y=j\frac{\partial\phi}{\partial y}+\frac{\partial\psi_1}{\partial y},\ u_z=k\frac{\partial\phi}{\partial z}+\frac{\partial\psi_2}{\partial z} \qquad (3\,\mathrm{a-c})$$

ここで、j 及び k は、後に定める係数を表す。式（３ａ－ｃ）の変位成分を式（２ａ－ｃ）の変位のつり合い方程式に代入すると、変位ポテンシャルの支配方程式が次の様に得られる。

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{c_{11}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\left[c_{66}+j(c_{12}+c_{66})\right]\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\left[c_{55}+k(c_{13}+c_{55})\right]\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}+(c_{12}+c_{66})\frac{\partial^2\psi_1}{\partial y^2}+(c_{13}+c_{55})\right.$$
$$\left.\times\frac{\partial^2\psi_2}{\partial z^2}\right\}+b_x=0 \qquad (4\,\mathrm{a})$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{(c_{66}j+c_{66}+c_{12})\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+c_{22}j\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\left[c_{44}j+k(c_{23}+c_{44})\right]\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}+(c_{23}+c_{44})\frac{\partial^2\psi_2}{\partial z^2}+c_{66}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}\right.$$
$$\left.+c_{22}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial y^2}+c_{44}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial z^2}\right\}+b_y=0 \qquad (4\,\mathrm{b})$$

キーワード：弾性，異方性，直交異方性，３次元解，物体力．

連絡先：〒090-0015　北見市公園町 165 番地，TEL.（0157）26-9472，FAX.（0157）23-9408.

$$\frac{\partial}{\partial z}\left\{\left(c_{55}k+c_{55}+c_{13}\right)\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\left[c_{44}k+j\left(c_{44}+c_{23}\right)\right]\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+c_{33}k\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}+\left(c_{44}+c_{23}\right)\frac{\partial^2\psi_1}{\partial y^2}+c_{55}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2}+c_{44}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial y^2}\right.$$
$$\left.+c_{33}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial z^2}\right\}+b_z=0 \qquad (4\,\mathrm{c})$$

5．結果　式（4 a − c）は、ϕ，ψ_1及びψ_2に関する３元連立偏微分方程式であるが、その連成を解くと、次の解を得る。

$$\left\{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\mu_2\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{c_{44}}{c_{66}}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\mu_1\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{c_{44}}{c_{55}}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+b_3\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(b_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}+b_2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+\frac{c_{33}}{c_{11}}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right]+\frac{c_{12}+c_{66}}{c_{11}\kappa}\frac{\partial^4}{\partial y^2\partial z^2}\left[\left(\nu_1-b_1\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\left(\nu_1\frac{c_{44}}{c_{55}}-b_2\right)\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\left(\nu_1b_3-\frac{c_{33}}{c_{11}}\right)\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\right\}\phi$$
$$=\frac{c_{12}+c_{66}}{c_{11}c_{66}}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{c_{44}}{c_{55}}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+b_3\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(b_y^*-\mu_2j_1b_x^*\right)-\frac{c_{13}+c_{55}}{c_{11}c_{55}}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\left(\mu_2-\frac{c_{12}+c_{66}}{c_{11}\kappa}\right)\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{c_{44}}{c_{66}}\right.$$
$$\left.\times\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\left(\frac{c_{44}+c_{23}}{c_{12}+c_{66}}b_x^*-b_z^*\right)-\frac{1}{c_{11}}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\mu_2\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{c_{44}}{c_{66}}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\partial^2b_x^*}{\partial x^2}+\frac{c_{44}}{c_{55}}\frac{\partial^2b_x^*}{\partial y^2}+b_3\frac{\partial^2b_x^*}{\partial z^2}\right) \qquad (5\,\mathrm{a})$$

$$\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}+\left(\mu_2-\frac{c_{12}+c_{66}}{c_{11}\kappa}\right)\frac{\partial^2\psi_1}{\partial y^2}+\frac{c_{44}}{c_{66}}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial z^2}=\frac{1}{\kappa}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\mu_1\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\nu_1\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right)+\frac{b_x^*}{c_{11}\kappa}-\frac{1}{c_{66}}\left(b_y^*\right.$$
$$\left.-\mu_2j_1b_x^*\right) \qquad (5\,\mathrm{b})$$

$$\frac{\partial^2\psi_2}{\partial z^2}=-\frac{c_{11}\kappa}{c_{13}+c_{55}}\left(\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}+\mu_2\frac{\partial^2\psi_1}{\partial y^2}+\frac{c_{44}}{c_{66}}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial z^2}\right)-\frac{1}{c_{66}}\frac{c_{11}\kappa}{c_{13}+c_{55}}\left(b_y^*-\mu_2j_1b_x^*\right) \qquad (5\,\mathrm{c})$$

ここで、

$$b_1=\frac{c_{44}+c_{23}}{c_{12}+c_{66}}\frac{c_{13}+c_{55}}{c_{55}}-\frac{c_{13}}{c_{11}}\frac{c_{13}+2c_{55}}{c_{55}},\quad b_2=\frac{c_{66}}{c_{55}}\frac{c_{44}+c_{23}}{c_{12}+c_{66}}\frac{c_{13}+c_{55}}{c_{11}}+\frac{c_{44}}{c_{11}} \qquad (6\,\mathrm{a},\ \mathrm{b})$$

$$b_3=\frac{c_{33}}{c_{55}}-\frac{c_{44}+c_{23}}{c_{12}+c_{66}}\frac{c_{13}+c_{55}}{c_{55}},\quad \kappa=\frac{c_{13}+c_{55}}{c_{11}}\frac{c_{66}}{c_{23}+c_{44}-\mu_2j_1\left(c_{13}+c_{55}\right)},\quad j_1=\frac{c_{11}\mu_1-c_{66}}{c_{12}+c_{66}} \qquad (6\,\mathrm{c}),(7\,\mathrm{a},\ \mathrm{b})$$

$$k_1=\frac{c_{11}\nu_1-c_{55}}{c_{13}+c_{55}},\quad \nu_1=\frac{c_{55}\left(c_{23}+c_{44}\right)-c_{44}\left(c_{13}+c_{55}\right)j_1}{c_{11}\left(c_{23}+c_{44}\right)-\left(c_{13}+c_{55}\right)\left(c_{66}j_1+c_{66}+c_{12}\right)} \qquad (7\,\mathrm{c},\ \mathrm{d})$$

また、μ_1及びμ_2は、次の２次方程式

$$c_{11}c_{66}\mu^2+\left[c_{12}\left(c_{12}+2c_{66}\right)-c_{11}c_{22}\right]\mu+c_{22}c_{66}=0 \qquad (8)$$

の２つの根を表し、b_x^*，b_y^*及びb_z^*は、次式で表さられる。

$$b_x^*=\int b_x dx+f_1(y,z),\quad b_y^*=\int b_y dy+f_2(x,z),\quad b_z^*=\int b_z dz+f_3(x,y) \qquad (9\,\mathrm{a}-\mathrm{c})$$

ここで、$f_1(y,z)$，$f_2(x,z)$及び$f_3(x,y)$は、任意関数を表す。

6．あとがき　式（4 a − c）の連成を解くためには、式（7 b − d）及び（8）を用いて、式（4 b）からϕを消去してψ_2をψ_1で表し、それを式（4 a，c）に代入してϕとψ_1に関する２元連立偏微分方程式を作り、演算子を用いると連成を解くことができる。式（5 a）のϕに関する６階の偏微分方程式は、２つの３角関数と１つの指数関数とを積とする変数分離の方法で解くことができる。

参考文献

1）Hata, K.: On one method for solving three-dimensional elasticity problems in orthotropic solids, Proc. 6th Japan Nat. Cong. Appl. Mech., 6, pp.43-46, 1956.

2）Sonoda, K. and Horikawa, T.: Displacement functions for an orthotropic elastic body and their applications to thick plate problems, Theor. Appl. Mech., 29, pp.117-126, 1981.