

I-A176

楕円剛体介在物を有する無限領域内に存在する点熱源のグリーン関数

東 急 建 設 正会員 吉 川 和 夫
名古屋工業大学 正会員 長谷部 宣 男

1. 緒言 点熱源の変位境界値問題の報告は、無限領域内の円形異種材料の周辺に発生熱源と吸収熱源が存在する解析¹⁾が見当たすが、変位境界値問題は外力境界値問題に比べて少ない。本論文では、無限領域中に存在する楕円剛体介在物が剛体変位する場合で、境界上で熱流の出入りがない断熱問題および境界上で温度 $\Theta=0$ が与えられる等温問題に対する点熱源のグリーン関数を誘導する。解析には、写像関数と複素応力関数による方法を用いる。解析例として、等温問題の応力分布を示す。

2. 写像関数 図1に示す楕円孔外側領域(z -plane)を単位円外(ζ -plane)に写像する写像関数は次式で表される。

$$z = \omega(\zeta) = E_0 \zeta + \frac{E_1}{\zeta}, \quad E_0 = \frac{a+b}{2}, \quad E_1 = \frac{a-b}{2} \quad (1)$$

ここに、 a 、 b は楕円形の x 、 y 方向の径で、 $a=b$ の時には円孔、 $b=0$ の時にはクラック形状を表す。

3. 応力関数の誘導 楕円剛体介在物を有する無限領域内の任意点に発生熱源 z_a (ζ -plane上で ζ_a)、無限遠点に吸収熱源が存在する場合について、断熱状態および等温状態での複素応力関数の一般解を導く。

外力および変位境界条件式は、単位円外で正則な複素応力関数 $\phi(\zeta)$ 、 $\psi(\zeta)$ および温度関数 $\Omega(\zeta)$ を用いて次式で表される^{2)、4)}。

$$\phi(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \phi'(\sigma) + \overline{\psi(\sigma)} = i \int (p_x + ip_y) ds \quad (2)$$

$$\kappa \phi(\sigma) - \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\phi'(\sigma)} - \overline{\psi(\sigma)} + 2G\alpha' \int \Omega(\zeta) \omega'(\zeta) d\zeta = 2G(u + iv) \quad (3)$$

$$\Omega(\zeta) = -\frac{M}{2\pi k} \left\{ \log(\zeta - \zeta_a) + \Gamma \log\left(\frac{\zeta - \zeta'_a}{\zeta}\right) + C \right\}, \quad \zeta'_a \equiv \frac{1}{\zeta_a} \quad (4)$$

p_x 、 p_y : x 、 y 方向の外力

u 、 v : x 、 y 方向変位

G : せん断弾性係数

ν 、 α : ポアソン比、線膨張係数

平面ひずみ状態 : $\alpha' = \alpha(1+\nu)$ 、 $\kappa = 3-4\nu$

平面応力状態 : $\alpha' = \alpha$ 、 $\kappa = (3-\nu)/(1+\nu)$

G : せん断弾性係数

M : 熱源の強さ(本論文では発生熱源)

k : 熱伝導率

Γ : 断熱($\Gamma=1$)、等温($\Gamma=-1$)

C : 基準とする点の温度より

決められる定数

孔および介在物を有する無限領域の場合は、式(3)左辺第4項に含まれる多価関数($\log$ の項)により、孔を一周したときに変位の食い違い(Thermal dislocation)を生じる。そこで、変位の一価性を満たすため、この多価関数を打ち消す関数を考える。応力および変位の食い違いを打ち消す項 $A \log \zeta$ 、 $B \log \zeta$ を用いて、求めたい複素応力関数 $\phi(\zeta)$ 、 $\psi(\zeta)$ を次式で置く。

$$\phi(\zeta) = \phi_1(\zeta) + \phi_2(\zeta), \quad \psi(\zeta) = \psi_1(\zeta) + \psi_2(\zeta) \quad (5)$$

$$\phi_1(\zeta) = \frac{\alpha M G R}{4\pi k} \{ \omega(\zeta) - \omega(\zeta_a) \} \{ \log(\zeta - \zeta_a) - 1 \} + A \log \zeta \quad (6)$$

$$\psi_1(\zeta) = -\frac{\alpha M G R}{4\pi k} \overline{\omega(\zeta_a)} \log(\zeta - \zeta_a) + B \log \zeta \quad (7)$$

キーワード：熱弾性、点熱源、変位境界値問題、複素応力関数、グリーン関数、断熱、等温

〒150-8340 東京都渋谷区渋谷 1-16-14 渋谷地下鉄ビル内 TEL 03-5466-5189 □ FAX 03-3797-7547

ここで、 $\phi_1(\zeta)$ 、 $\psi_1(\zeta)$ の第一項は、点熱源が存在する無限領域内で応力および変位の一個性を満足するように決められる関数で³⁾、 $\phi_2(\zeta)$ 、 $\psi_2(\zeta)$ は一個正則な関数で境界条件を満足するように決められる。Rは平面ひずみ状態で $R=(1+\nu)/(1-\nu)$ 、一般化された平面応力状態で $R=1+\nu$ とされている。式(2)、(3)に式(5)～(7)を代入して孔の回りを一周したときに、応力および変位が一個となる条件より定数A、Bが得られる。

$$B = \bar{A}, \quad A = \frac{\alpha MGR}{4\pi k} \left\{ -\Gamma E_0 \zeta'_a + \frac{E_1}{\zeta_a} \right\} \quad (8)$$

複素応力関数 $\phi_2(\zeta)$ は、境界条件 $u = v = 0$ としてに式(5)～(7)を代入した式に $d\sigma/[2\pi i(\sigma - \zeta)]$ を乗じて単位円上でコーシー積分して得られる。最終的に、応力関数の一般解 $\phi(\zeta)$ は次式で得られる。

$$\begin{aligned} \phi(\zeta) = & \frac{\alpha MGR}{4\pi k} \left\{ \omega(\zeta) - \omega(\zeta_a) \right\} \left\{ \log(\zeta - \zeta_a) - 1 \right\} + A \log \zeta + \frac{\alpha MGR}{4\pi k} \frac{E_1}{\zeta} + \frac{1}{\kappa} \frac{\alpha MGR}{4\pi k} \frac{E_1}{\zeta} \log(-\zeta_a) \\ & + \frac{1}{\kappa} \frac{\alpha MGR}{4\pi k} \left[\left\{ \omega(\zeta) - \omega(\zeta_a) \right\} \log\left(\frac{1}{\zeta} - \bar{\zeta}_a\right) - E_0 \zeta \log(-\bar{\zeta}_a) - \frac{E_1}{\zeta} \right] \\ & + \frac{1}{\kappa} \frac{\alpha MGR}{4\pi k} \frac{E_1}{\zeta} - \frac{1}{\kappa} \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma + \text{const} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} F(\sigma) = & \frac{\alpha MGR}{4\pi k} (1 + \kappa) \left[E_0 \left\{ \Gamma \sigma \log\left(\frac{\sigma}{\sigma - \zeta'_a}\right) + \sigma - \Gamma \zeta'_a \log\left(\frac{\sigma}{\sigma - \zeta'_a}\right) \right\} \right. \\ & \left. + \Gamma \frac{E_1}{\sigma} \log\left(\frac{\sigma}{\sigma - \zeta'_a}\right) - \Gamma \frac{E_1}{\zeta'_a} \left\{ \log\left(\frac{\sigma}{\sigma - \zeta'_a}\right) \right\} \right] - C \frac{\alpha MGR}{4\pi k} (1 + \kappa) \left\{ E_0 \sigma + \frac{E_1}{\sigma} \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

$\psi(\zeta)$ は、式(3)の共役形の両辺に $d\sigma/[2\pi i(\sigma - \zeta)]$ を乗じて単位円上でコーシー積分により求めるか、境界上で変位が零となる境界が存在することから、変位境界上の解析接続から求めることもできる⁴⁾。

$$\psi_A(\zeta) = \kappa \bar{\phi}_A\left(\frac{1}{\zeta}\right) - \frac{\bar{\omega}(1/\zeta)}{\bar{\omega}'(\zeta)} \phi'_A(\zeta) + \left\{ 2G\alpha' \int \Omega(\zeta) \bar{\omega}'(\zeta) d\zeta \right\}_{\bar{\zeta}=1/\zeta} \quad (11)$$

式(9)、(10)の発生熱源の解と吸収熱源の解〔式(9)、(10)において、 ζ_a の代わりに $\bar{\zeta}_b$ を代入し、熱源の強さを $-M$ とした時の解〕を重ね合わせると、2ヶ所熱源（発生熱源と吸収熱源）が存在する場合の解となる。

4. 解析例 解析例として、 $\kappa=2$ （平面ひずみ状態でポアソン比0.25、一般化された平面応力状態で1/3）、発生熱源の位置が $(-2a, 0)$ に存在する場合で、境界上での温度（等温問題）が与えられた場合の無次元化した応力分布（境界上およびx軸上）を図2に示す。境界上の法線方向応力、接線方向応力、せん断応力をそれぞれ σ_r 、 σ_θ 、 $\tau_{\theta\theta}$ 、x軸上のx方向、y方向応力、せん断応力をそれぞれ σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} としている。

応力値は、せん断応力を除いて引張を正、圧縮を負、せん断応力は反時計回り方向を正としている。熱源近傍で熱膨張による圧縮応力が大きくなっている。x軸上では、対称性によりせん断応力は零になる。境界上では温度膨張の影響がなくなり、境界上で法線方向応力 σ_r と接線方向応力 σ_θ には、 $\sigma_\theta/\sigma_r = (3-\kappa)/(1+\kappa)$ の関係が成り立つ⁵⁾。

5. 結言 楕円剛体介在物を有する無限領域内に発生熱源が存在する場合のグリーン関数が積分項を含まない閉じた形で得られた。解析例として、等温問題の応力分布を示した。

〔参考文献〕 1) 福井ら，日本機械学会論文集，1974. 2) N. I. Muskhelishvili, Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity (fourth Edition), Noordhoff, The Netherlands., 1963. 3) 西谷ら，体積力法による二次元定常熱弾性問題の解析法（第1報 基礎の理論），日本機械学会論文集，Vol. 57, 1991. 4) N. Hasebe et al., J. of Thermal Stresses, Vol. 12, 1989. 5) N. Hasebe, Ingenieur-Archiv, Vol. 48, 1979.

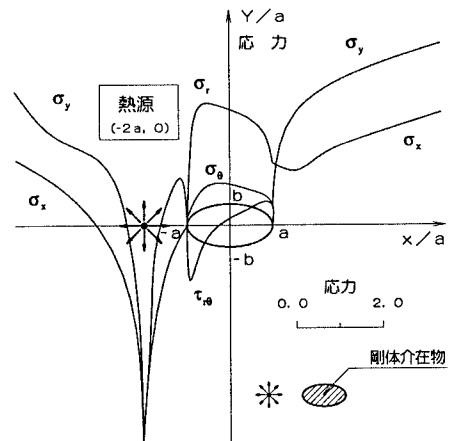


図2 応力分布（境界上での温度 $\Theta = 0$ ）