土木学会第52回年次学術講演会（平成9年9月）

CS-24

境界積分方程式によるクラックの高速解法について

京都大学工学研究科　正会員　西村直志
京都大学工学研究科　フェロー　小林昭一

1 序

地震断層の形成に関するモデル実験として静的な亀裂の成長実験が行なわれている [1]。そこで取り扱われている亀裂成長問題を実地盤を想定して数値シミュレーションで取り扱うためには、大規模なクラックの解析を行う必要がある。そのための解法として境界積分方程式法が有力である。しかし、境界積分方程式法では得られる行列が密になる事が障害となり、その適用は案外小さい問題に限られてきた。ところが、最近、多重極展開を用いた解法が提案され [2][3]、パソコン程度の計算機でも数万元規模の問題の解析が可能になってきた。地下亀裂の解析の様な大規模問題の解法としては多重極展開法が今後益々用いられるようになるものと思われる。しかしながら今のところ多重極展開法の適用は通常の境界値問題に限られ、亀裂問題への応用は殆ど検討されていないようである。地下亀裂の解析においては 3 次元性が重要であると思われるが、本報ではまず基礎的な研究として 2 次元 Laplace 問題における亀裂問題の多重極展開法を取り上げる。

2 多重極展開法

今、簡単のため、2 次元全平面の中に、一般には複数の互いに交わらない曲線からなるクラック S が有るとする。Laplace 方程式のクラック問題は次の境界値問題の解を求めることに帰着される。

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } R^2, \qquad \frac{\partial u^\pm}{\partial n} = 0 \quad \text{on } S, \qquad u \to u_\infty \quad \text{as } |x| \to \infty$$

ここに u_∞ は漸近場であり、全平面で Laplace 方程式を満たす。また、上付きの+ (−) は S の法線が向く側からの極限、ないしはその反対を指す。この問題の解は

$$u(\boldsymbol{x}) = u_\infty(\boldsymbol{x}) + \int_S \frac{\partial G}{\partial n_y}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\varphi(\boldsymbol{y})dS \text{ in } R^2 \setminus S \tag{1}$$

となる。ここに、φ は開口変位であり、$G = -1/2\pi \log r$ は Laplace 方程式の基本解である。開口変位は超特異積分方程式

$$0 = \frac{\partial u_\infty}{\partial n}(\boldsymbol{x}) + \int_S \frac{\partial^2 G}{\partial n_x \partial n_y}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\varphi(\boldsymbol{y})dS \text{ on } S \tag{2}$$

の解として求められる。

さて、今、S を要素に分割し、各要素上で φ が一定であるとする。そのような要素の集まりを S_0 と書く。このとき、$\boldsymbol{x}$ が S_0 から十分離れているとすると次の近似が成り立つ。

$$\int_{S_0} \frac{\partial^2 G}{\partial n_x \partial n_y}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\varphi(\boldsymbol{y})dS \sim \text{Re}\left((n_1(\boldsymbol{x}) - in_2(\boldsymbol{x}))\frac{i}{2\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{X^{i+1}}A_i\right), \tag{3}$$

ここに

$$A_i = \sum_k (\bar{\xi}^i_{k2} - \bar{\xi}^i_{k1})\varphi_k \tag{4}$$

であり、k に関する和は S_0 に含まれる要素番号について取る。また、X は原点を適当に選んだうえで、$\boldsymbol{x}$ を表す複素数であり、ξ^i_{k1}、ξ^i_{k2} はそれぞれ k 番目の要素の両端を表す複素数、φ_k は k 番目の要素の上での φ の値である。

キーワード: 亀裂解析、地下亀裂、多重極展開法
連絡先: 〒 606-01 京都市左京区吉田本町 TEL 075-753-5115, FAX 075-761-0646

今、φ_k が全て求まっているものとする。S を内部に含む正方形領域 を取り、これを縦横それぞれ 2 等分して 4 つの正方形領域に分ける。この操作を繰り返し、各正方形に含まれる要素の数が既定値より小さくなるか、2 等分の回数が既定値を越えるかしたところで分割を修了する。このように分割したうえで、一番下の階層 (細かいもの) の正方形に属する要素で (4) を計算する。次にその上の階層の要素については、それに含まれる、階層が一つ小さい正方形 4 つの多重極モーメント (4) を単に原点移動させることによって足し合わせる。このようにして階層を遡ることにより、全ての階層の正方形での多重極モーメント (4) を計算する。

次に (2) に含まれる積分を評価していくが、この際階層構造を逆に降りて行く。ある階層に属する 2 つ正方形で、辺や頂点を共有しないものは、互いに遠方にあると呼ぶ。ある階層の 2 つの正方形について、それらが互いに遠方にあるが、それぞれの親の正方形が互いに遠方でないとき、それぞれの三角形の中心で (3) に含まれる級数を Taylor 展開したときの係数を計算する。これを、自分の親の正方形の持っている Taylor 展開の係数を原点移動したものに加えると、自分と同じか、自分より上の階層の遠方の要素からの 2 重層ポテンシャルの微分を Taylor 展開したときの係数を計算したことになる。ある正方形 A について、A と同階層の、A に隣接する正方形が最下層となったとき、B の内部に含まれる要素から A 内の選点での 2 重層ポテンシャルの微分への寄与は、従来法によって直接積分計算により評価する。このようにして、既知の φ に対して (2) に含まれる積分を評価することが出来る [2][3]。従って、連立方程式の solver として反復解法を選べば、上記の方法により、効率良く積分方程式の近似解を求めることが出来る。

このようにしてクラック問題を解いた例の未知数の数と全計算時間を表 1に示した。クラックは、点 $(-1,-1)$、$(1,1)$ を結ぶ直線とし、$u_\infty = x_2$ とした。方程式の解法としては、前処理付きの GMRES を用いた。前処理行列としては一つの最下層の正方形内部に属する要素同士の 2 重層の法線微分を離散化した行列の逆行列を使用した。前処理のための逆行列計算には Crout 法を用いた。使用した計算機は実メモリーを 24MB 有し、X を始め多くの process が走っている一世代前の機械であるが、かなり高自由度まで実用的な計算時間で計算を行うことが出来た。なお、精度についても非常に高精度であった。

表 1: CPU 時間 (sec)

自由度	200	500	800	2000	3000	8000
従来法	6.06	92.74	385.78			
多重極	7.4	32.65	63.55	288.85	524.15	2236.36

3 終りに

本報ではごく基本的な問題しか取り上げることが出来なかったが、3 次元問題や弾性問題への拡張は容易であり、今後より実際的な断層問題への適用を試みる予定である。

参考文献

[1] 堀宗朗、後藤寛英: 第 46 回応用力学連合講演会講演予稿集 (1997) 277–278.

[2] 山田賢志、速水謙: BEM テクノロジーコンファレンス論文集 5 (1995) 59–64.

[3] 福井卓雄、服部純一: 計算工学講演会論文集 1 (1996) 319–322.