土木学会第52回年次学術講演会（平成9年9月）

Ⅳ-343　ＰＥＲＴ／ＭＡＮＰＯＷＥＲ型の最適スケジューリングモデルの開発
―新しいネットワークスケジューリングモデルの理論開発（２）―

立命館大学　正員　春名　攻
立命館大学大学院　学生員　○滑川　達
立命館大学大学院　学生員　櫻井　義夫
立命館大学　学生員　伊藤　壮央

１．はじめに

我々はこれまでにＣＰＭ型のスケジューリング問題が，与えられた工程ネットワークのカット集合とその順序関係に基づいたカットネットワーク，さらには作業の流れを始点から終点まで表すルート集合という形で捉えて定式化できることを示した。またこれとともに，費用関数が一般形で与えられた場合でもカットネットワークでの配分問題としてＤＰを適用した解法によって最適解を求められることを示した[1]．その後，研究を進める過程で，同様の理論が，ＰＥＲＴ／ＭＡＮＰＯＷＥＲ型のスケジューリング問題に対しても，大変効率的な最適解法を与えるということが明らかとなったため，その研究成果を示すこととした．

２．ＰＥＲＴ／ＭＡＮＰＯＷＥＲタイプのスケジューリングモデルの開発

（１）問題の定式化に関する検討

ここでは，ＰＥＲＴ／ＭＡＮＰＯＷＥＲ型のスケジューリング問題をＣＰＭ型のスケジューリング問題同様，カットネットワークにおける配分時間問題として定式化していくこととする．また，カットネットワークにはイニシャルレベルを設定しておく．

いま，状態変数をネットワーク工程表を形成するすべての各ルートの実施状況，すなわち，

$$R_{e,cz} = (r^{1}_{e,cz},\ r^{2}_{e,cz},\ \cdots,\ r^{m}_{e,cz})$$

$r^{k}_{e,cz}$；任意のレベル e でかつレベル e＋１のカット c_z と順序関係をもつカット c_y におけるルート k の実施日数

のような m 次元ベクトルとおく．ただし，

$$R_{e,cz} \in PR_{e,cz}$$

$PR_{e,cz}$；実行可能な実施状況パターンの集合

すなわち，c_y がレベル e，c_z がレベル e＋１であるとき，$i \in c_y$，かつ $i \notin c_z$（$c_y \prec c_z$）である作業 i が完了している実施状況パターンの集合

つづいて，決定関数を各レベルのカットへの配分日数として設定する．すなわち，決定関数を，

$$g_e(R_{e,cz}) = g_e(r^{1}_{e,cz}, r^{2}_{e,cz}, \cdots, r^{m}_{e,cz})$$

と表せば，この値はこのタイプの問題の目的が工期最小である以上，上記の条件を満たす作業 i の最小完了時刻と考えることができる．以下においては，この時刻をカット断面とよぶ．以上の考え方を導入してＰＥＲＴ／ＭＡＮＰＯＷＥＲの定式化は，各レベルの決定関数値，つまりカットの配分日数の総和の最小として求められる．すなわち，

$$\text{minimize}\ f_n(r^1,\ r^2,\ \cdots,\ r^m) = \sum_{e=1}^{n} g_e(r^{1}_{e,cie},\ r^{2}_{e,cie},\ \cdots,\ r^{m}_{e,cie})$$

となる．また，このときの条件は，

$$r^{k}_{1,ci1},\ r^{k}_{2,ci2},\ \cdots r^{k}_{n,cin} \geqq 0 \quad (k=1,2,\cdots,m)$$

$$\sum_{e=1}^{n} r^{k}_{e,cie} = r^k \quad (k=1,2,\cdots,m)$$

$$c_{i1} \prec c_{i2} \prec \cdots \prec c_{in-1}$$

$$c_{in} \in \phi$$

である．さらに，このとき上式の１から n までの各レベルが，フィードバックのないシステムあるカットネットワークでの配分問題として設定されるので，ＤＰの基本原理である最適性の原理が適用でき，次のような問題，すなわち，

$$f_n(r^1,\ r^2,\ \cdots,\ r^m) = \min_{\substack{0 \leqq r^{k}_{n,cin} \leqq r^k\ (k=1,2,\cdots,m) \\ c_{in-1} \prec c_{in}}} \{g_n(r^{1}_{n,cin}, r^{2}_{n,cin}, \cdots, r^{m}_{n,cin}) + f_{n-1}(r^1 - r^{1}_{n,cin}, r^2 - r^{2}_{n,cin}, \cdots, r^m - r^{m}_{n,cin})\}$$

のように，繰り返しの関数方程式として定式化することができる．

(２)カット断面に関する検討

ここでは，上述定式化の決定関数 $g_{e,cz}(R_{e,cz})$

キーワード　：　ネットワークトポロジー，スケジューリングモデル，ＰＥＲＴ／ＭＡＮＰＯＷＥＲ
〒525-77　草津市野路東1丁目1-1　都市地域計画研究室　TEL 0775-61-2736　FAX 0775-61-2736

の値，すなわちカット断面を求める方法について検討を加える．ここで求めているカットには，構成する作業間に順序関係が存在しないことを定義しているため，ここでの問題を並列ネットワークを対象とするスケジューリング問題として考えていよい．そして，このような問題の結果として求められるスケジュールが，作業数m（ここではカット含まれる作業数）に対応するm×mマトリックスとして表現できることも，これまでの本研究における分析によって明らかとなっている[2)]．そして，並列ネットワークにおける(カット内の)資源制約を有したＰＥＲＴ／ＭＡＮＰＯＷＥＲ型のスケジューリング問題は，

$$\sum_{k=1}^{N} a_{ik} \cdot x_k = d_i,$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ik} \cdot w_{il} \leqq W_l,$$

$$x_k \geqq 0,$$

$$(k = 1, 2, \cdot\cdot, N),$$

$$(i = 1, 2, \cdot\cdot, m),$$

a_{ik}：時間区間Ｉｋにおける作業ｉの実施状況（実施しているとき１，そうでなければ０）
x_k　：時間区間Ｉｋの日数
d_i　：作業ｉの所要日数
w_{il}：作業ｉにおける資源ｌの必要資源数
W_l　：資源ｌの制約数

の制約条件のもとで，

$$\lambda = \min \sum_{k=1}^{N} x_k,$$

を求める線形計画の問題として定式化される．なお，ここでNは資源制約を満たすすべての同時作業パターンの数を表すものとする．そして，スケジュールは最適解が求められたときの基底行列として求めることができるので，以上の問題に対して列生成法を用いた解法を適用できることがわかる．すなわち，すべてのパターンを暗に対象としつつ，あるステップでの解の改良のために，前ステップで求められた基底行列Bに新しく導入するパターンp_uを，

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot w_{il} \leqq W_l \\ a_i = 1 \text{あるいは} 0 \end{array}\right\}$$

a_i：パターンp_uの構成要素

の制約条件のもとで，

$$U_u = \max \sum_{i=1}^{m} \beta_i a_i$$

を与えるような$\{a_i\}$として求める補助問題を解くことにより決定する．ここでβ_iは上述定式化における目的関数の係数ベクトル$C=\{c_j\}$の各要素の値がすべて１であるため$c_j = 1$となり，

$$\beta_i = CB^{-1} = \sum_{i=1}^{m} \beta_{jil}, \qquad B^{-1} = (\beta_{jil}),$$

として容易に求められる．

定式化から明らかなように，この補助問題は*0-1*ナップサック問題となるが，ここではＤＰを用いて求めていくこととする．

以上のようにして，任意のカットに含まれる作業群を対象として最小の完了時刻を求めることができるが，この値を直接，決定関数値として用いることはできない．すなわち，ここでの決定関数値がカット断面の時刻であるため，以下のような処理を加えることにより，前述したカットネットワークでの配分問題における決定関数値を求める必要がある．いま，基底行列として求められたパターンにおいて，

$$i \in c_y \text{ かつ } i \notin c_z \quad (c_y < c_z)$$

となる作業が１つでも実施している，すなわち，$a_{ik'}=1$である基底行列の列ｋ’のみを抽出し，

$$\lambda' = \sum_{k'=1}^{M} x_{k'},$$

を決定関数値$g_{e,cz}$（$R_{e,cz}$）として求めればよい．ここで，Mは抽出された列の数を表すものとする．さらに，最終的に求めるべき全体のスケジュールは，上で抽出した各段階のパターンの集合として求めることができる．

４．おわりに

本研究においては，提案したモデルを用いた例題への適用計算をおこなうとともに，最適順序決定問題に対する本モデルの効率性を確認するために，実事例へのブランチ＆バウンド法を適用した解法との比較検討を実施したが，その結果については紙面の関係上，発表時に示すこととする．

【参考文献】

1)春名，滑川，櫻井；新しいネットワークスケジューリングモデルの理論開発-工期λに対する最小工事費用の工程計画を求めることのできるスケジューリングモデル-，土木学会第51回年次学術講演会講演概要集，1996，8
2)春名，小林，滑川；工程計画における最適資源配分問題に関する理論的研究，土木学会第49回年次学術講演会講演概要集，1994，8