土木学会第52回年次学術講演会（平成９年９月）

Ⅳ－250

空間的自己相関を考慮した地域計量モデルのパラメータ推定手法に関する一考察*

東京大学大学院　学生員　福本潤也**
東京大学大学院　学生員　堤　盛人***

1. はじめに

空間的自己相関は地域科学特有の問題であり、これを無視してパラメータの推定を行うと、推定値の有効性が低下する。[1]本稿ではまず、この問題に対する既存の研究を整理し、それらの一般形を示すことにより各手法の位置づけを明らかにする。次に、交通行動分析の分野で研究されている構造化プロビットモデルとの比較により両者の共通性を明らかにし、今後の研究の一方向性を示す。

2. 既存の手法の一般形の定式化

本稿ではクロス・セクションデータから(1)式に示す線形回帰モデルのパラメータを推定する場合について考察する。地価関数の推定などを想像されたい。

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \qquad \cdots(1)$$

$\boldsymbol{y} = (y_1, \cdots y_n)^t$：内生変数

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}$$：外生変数

$\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \cdots, \beta_m)^t$：パラメータ

$\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \cdots \varepsilon_n)^t$：誤差

通常、誤差項には(2)-(4)式の仮定がおかれるが、地域を分割したゾーン毎の分析において(3)式が満たされない場合、空間的自己相関が存在するという。

$$E(\varepsilon_i) = 0 \qquad (i = 1, \cdots, n) \qquad \cdots(2)$$

$$E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0 \qquad (i \neq j \quad i, j = 1, \cdots, n) \qquad \cdots(3)$$

$$E(\varepsilon_i^2) = \sigma^2 \qquad (i = 1, \cdots, n) \qquad \cdots(4)$$

これまで、空間計量経済学や地理学の分野で空間的自己相関が存在する場合のパラメータ推定および検定方法について様々な解決法が考案されてきた。本研究でそれらを整理した結果、以下の(5)-(8)式に示す一般形が得られた。

$$\boldsymbol{y} = \sum \rho_i \boldsymbol{W}_i \boldsymbol{y} + \boldsymbol{X\beta} + \sum \boldsymbol{W}_i \boldsymbol{X} \boldsymbol{\gamma}_i + \boldsymbol{\varepsilon} \qquad \cdots(5)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{cases} \sum \lambda_i \boldsymbol{W}_i \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\mu} & \cdots(6) \\ \sum \lambda_i \boldsymbol{W}_i \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\mu} & \cdots(7) \\ \sum \boldsymbol{W}_i \boldsymbol{\upsilon}_i + \boldsymbol{\mu} & \cdots(8) \end{cases}$$

$\rho_i, \lambda_i, \boldsymbol{\gamma}_i = (\gamma_{i1}, \cdots, \gamma_{im})^t$：パラメータ

$\boldsymbol{\mu}_i = (\mu_1, \cdots, \mu_n)^t, \boldsymbol{\upsilon}_i = (\upsilon_1, \cdots, \upsilon_n)^t$：確率変数

$\boldsymbol{\mu} \sim N(0, \sigma_\mu{}^2 \boldsymbol{I}), \boldsymbol{\upsilon}_i \sim N(0, \sigma_{\upsilon_i}{}^2 \boldsymbol{I}), E(\boldsymbol{\mu\upsilon}^t) = 0$

(6)-(8)式の誤差モデルの中から１つを選択して(5)式に代入し、適当な制約を加えることにより、これまで提案されてきた各モデルが容易に導出される。また、$\boldsymbol{W}_i$はSpatial Weight Matrixと呼ばれるもので、モデルを同定可能とするために分析者が先験的に有する情報として与えるものである。例えば、ゾーンiとゾーンjの距離d_{ij}を用いて、$\omega_{ij} = d_{ij}^{-\alpha}$（$\alpha$は正のパラメータ）と与えたりする。以下の(a)-(g)には１次のオーダーの主なモデルを記す。

(a)mixed regressive-spatial autoregressive model[2]

$$\boldsymbol{y} = \rho \boldsymbol{Wy} + \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\mu} \qquad \cdots(9)$$

(b)mixed regressive-spatial crossregressive model[4]

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{WX\gamma} + \boldsymbol{\mu} \qquad \cdots(10)$$

(c)mixed regressive-spatial regressive model[4]

$$\boldsymbol{y} = \rho \boldsymbol{Wy} + \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{WX\gamma} + \boldsymbol{\mu} \qquad \cdots(11)$$

(d)regression model with autoregressive disturbances[2]

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + (\boldsymbol{I} - \lambda \boldsymbol{W})^{-1} \boldsymbol{\mu} \qquad \cdots(12)$$

(e)mixed regressive-spatial autoregressive model with autoregressive disturbances[2]

$$\boldsymbol{y} = \rho \boldsymbol{Wy} + \boldsymbol{X\beta} + (\boldsymbol{I} - \lambda \boldsymbol{W})^{-1} \boldsymbol{\mu} \qquad \cdots(13)$$

(f)spatial autoregressive movingaverage model[3]

$$\boldsymbol{y} = \rho \boldsymbol{Wy} + \boldsymbol{X\beta} + (\boldsymbol{I} + \lambda \boldsymbol{W}) \boldsymbol{\mu} \qquad \cdots(14)$$

(g)spatial correlation model[5]

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{W\upsilon} + \boldsymbol{\mu} \qquad \cdots(15)$$

---

* キーワード：空間的自己相関、地域計量モデル、構造化プロビットモデル
** 〒113 東京都文京区本郷 7-3-1，Tel:03-3812-2111(ext.6129)，Fax:03-5689-7290
*** 同上

表１　既存の手法の比較

	誤差モデル	一般形に課される制約	推定方法	主な検定方法		
				帰無仮説	対立仮説	手法
(a)	(6) or (7)	$\gamma_i=\lambda_i=0(1\le i),\rho_i=0(2\le i)$	ML EGLS	$\rho=0$ $\rho=0$	$\rho\neq0$ 不明	LM test Moran test
(b)	(6) or (7)	$\rho_i=\lambda_i=0(1\le i),\gamma_i=0(2\le i)$	ML	$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{\gamma}\neq\boldsymbol{0}$	LR test
(c)	(6) or (7)	$\lambda_i=0(1\le i),\rho_i=\gamma_i=0(2\le i)$	ML	$\rho=0$ *and* $\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{0}$	$\rho\neq0,\boldsymbol{\gamma}\neq\boldsymbol{0}$	LR test
(d)	(6)	$\rho_i=\gamma_i=0(1\le i),\lambda_i=0(2\le i)$	ML EGLS	$\lambda=0$ $\lambda=0$	$\lambda\neq0$ 不明	W,LR,LM test Moran test
(e)	(6)	$\gamma_i=0(1\le i),\rho_i=\lambda_i=0(2\le i)$	ML	$\rho=\lambda=0$	$\rho\neq0,\lambda\neq0$	LM test
(f)	(7)	$\gamma_i=0(1\le i),\rho_i=\lambda_i=0(2\le i)$	ML	$\rho=\lambda=0$	$\rho\neq0,\lambda\neq0$	SARMA test
(g)	(8)	$\rho_i=\gamma_i=0(1\le i)$	EGLS,ML	表記なし	表記なし	表記なし

注)ML: Maximum Likelihood, EGLS: Estimated Generalized Least Squares
LR: Likelihood Ratio, LM: Lagrange Multiplier, W: Wald

(a)-(g)の各モデルの概要を表１に整理した。詳細については、原文を参照されたい。また、(5)-(8)式で示した一般形からは、上記のモデル以外にもいくつかの中間形を導出できる可能性がある。今後の研究が望まれる。

3. 構造化プロビットモデルとの比較

構造化プロビットモデルは交通行動分析の分野において研究されてきたモデルであり、誤差項の共分散行列を少数のパラメータで表現可能となるよう構造化している。Bolduc[6]が用いた目的地選択モデルでは、誤差モデルが

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\lambda\boldsymbol{W\varepsilon}+\boldsymbol{\mu} \qquad \cdots(16)$$

と定式化されており、

$$\boldsymbol{\varepsilon}\sim N(0,\sigma^2(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{W})^{-1}(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{W}^t)^{-1}) \qquad \cdots(17)$$

となる。2. で示した(d)の誤差項と同一の分布形を有することが容易に導出される。また、Yai et al.[7]の経路選択モデルでは誤差項の共分散行列が

$$\boldsymbol{\Sigma}=\sigma^2\boldsymbol{L}+\sigma_0{}^2\boldsymbol{I} \qquad \cdots(18)$$

$\boldsymbol{L}=(L_{ij})$

L_{ii}: 経路iの路線長

L_{ij}: 経路iと経路jの重複区間長

と定式化されており、

$$\boldsymbol{\varepsilon}\sim N(0,\sigma^2\boldsymbol{L}+\sigma_0{}^2\boldsymbol{I}) \qquad \cdots(19)$$

となる。2. で示した(g)の誤差項の分布

$$\boldsymbol{\varepsilon}\sim N(0,\sigma_\upsilon{}^2\boldsymbol{WW}^t+\sigma_\mu{}^2\boldsymbol{I}) \qquad \cdots(20)$$

と同一の分布形であることがわかる。

言うまでもなく、計量経済学等における空間的自己相関問題への対処法と構造化プロビットモデルは共通性を有する。しかし、筆者の浅見を差し引いたとしても、それぞれの研究成果が互いに還元されているとはいえない。今後、両者の成果が比較検討されることにより、それぞれの理論的精緻化が進展する可能性があると考える。

【参考文献】

1)Anselin et al., *Do Spatial Effects Really Matter in Regression Analysis?, Papers of the Regional Science Association*, Vol.65, pp.11-34, 1988.

2)Anselin, *Spatial Econometrics: Methods and Models*, Kluwer Academic, 1988.

3)Anselin et al., *Small Sample Properties of Tests for Spatial Dependence in Regression Models*, Anselin et al. ed. "*New Directions in Spatial Econometrics*", 1995.

4)Florax et al., *Specification and estimation of spatial linear regression models, Regional Science and Urban Economics* 22, pp.405-432, 1992.

5)Kelejian et al., *Spatial Correlation: A Suggested Alternative to the Autoregressive Model*, Anselin et al. ed. "*New Directions in Spatial Econometrics*", 1995.

6)Bolduc, *Generalized Autoregressive Errors in the Multinomial Probit Model, Transpn Res. -B*, Vol.26, No.2, pp.155-170, 1992.

7)Yai et al., *Multinomial probit with structured covariance for route choice behavior, Transpn Res.-B*, Vol.31, No.3, pp.195-207, 1997.