土木学会第52回年次学術講演会（平成9年9月）

Ⅲ－B333

マルチレイアーモデルによる浸透流解析の定式化

佐藤工業(株)　正会員　北野祐介
佐藤工業(株)　正会員　金子典由

1. はじめに

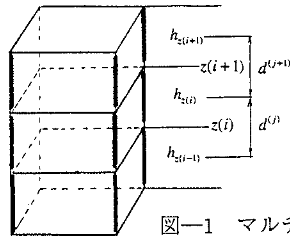
近年、大規模な地下構造物の施工が盛んに行われ、それらの掘削工事をすすめるにあたって地下水の挙動を予測することが必要不可欠となってきている。そこでコンピュータの性能とともに数値解析の分野では、より現実的な解析結果を要求される。止水壁を回り込む鉛直流れを考慮した計算を行うには三次元計算が必要である。しかし、三次元計算のための入力データの作成などを考えると、敬遠されがちである。そこで、入力に比較的抵抗感の少ない二次元モデルと一次元モデルの組み合わせによるマルチレイアーモデル計算を提案する。すなわち、水平平面には二次元、鉛直には一次元モデルを対応させたモデル化である。この計算手法は、二次元要素分割の延長線上にあり、難しい方法で入力データを作成する必要がない。また、水頭の計算結果は三次元計算でも最上層部にしか着目しないため、本解析での最上部レイアーの結果のみを用い、既存の二次元モデルとしての図化機能で表現できる。本手法を用いることにより、以上の利点が期待される。その定式化および計算例を報告する。

2. マルチレイアーによるモデル化

マルチレイアーの考え方はこれまでも検討されている。これらの検討では、滞水層と不透水層の互層を計算するのが主目的であった。層間の流れは漏水を評価する計算である。ここでは、滞水層内に止水壁平面があり鉛直流れが発生する場合を取り扱う。互層の場合は不透水層での漏水による鉛直流れに着目し、止水壁の場合は止水壁で鉛直流れに着目する。また定式化では、例えば、Hunt は二次元浸透流の支配方程式に、鉛直の漏水の項を追加して定式化されている。これらの手法を用いる場合、支配方程式の修正が必要である。これに対してここでは、二次元の浸透流計算と一次元の浸透流計算の組み合わせでモデル化を試みた。すなわち、水平方向には二次元有限要素法浸透流解析とし、鉛直の流れは一次元の浸透流計算でこの解析を節点の適合条件の重ね合わせだけで計算する。(図-1 参照) 基礎方程式として、連続の式を用いる。

$$\frac{\partial q_x}{\partial x}+\frac{\partial q_y}{\partial y}+\frac{\partial q_z}{\partial z}=0 \qquad (1)$$

境界条件として、Dirichet、Neumann、Cauchy を用いる。



図—1　マルチレイアーモデル

鉛直方向の積分を展開するのにライプニッツの法則(Leibnitz rule)を適用する。

$$\int_{z(i)}^{z(i+1)}\frac{\partial}{\partial x}f(x,y,z)dz$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}\int_{z(i)}^{z(i+1)}f(x,y,z)dz-f(x,y,z)\Big|_{z(i+1)}\frac{\partial z}{\partial x}+$$
$$f(x,y,z)\Big|_{z(i)}\frac{\partial z}{\partial x} \qquad (2)$$

各層での水平流束は深さ(z 方向)には変化しないと考える。

$$f(x,y)=\frac{1}{H}\int_{z(i)}^{z(i+1)}f(x,y,z)dz \qquad (3)$$

ここで、H は層の厚さで次式で表される。

$$H=z^{(i+1)}-z^{(i)} \qquad (4)$$

(1)式を鉛直方向に積分して(2)式を用いて整理すると以下のように展開できる。

$$\frac{\partial}{\partial x}(Hq_x)+\frac{\partial}{\partial y}(Hq_y)-q_z\Big|_{z(i+1)}+q_z\Big|_{z(i)}$$
$$-\left(q_x\Big|_{z(i+1)}\frac{\partial z^{(i+1)}}{\partial x}+q_y\Big|_{z(i+1)}\frac{\partial z^{(i+1)}}{\partial y}\right) \qquad (5)$$
$$+\left(q_x\Big|_{z(i)}\frac{\partial z^{(i)}}{\partial x}+q_y\Big|_{z(i)}\frac{\partial z^{(i)}}{\partial y}\right)=0$$

(5)式で、各層は水平と見なし第５と６項は無視でき、(6)式を得る。

キーワード：有限要素法、浸透流解析、マルチレイアー
連絡先：〒103　東京都中央区日本橋本町 4-12-20 佐藤工業(株),　Tel 03-3661-2297,　Fax 03-3668-9481

$$\frac{\partial}{\partial x}(Hq_x)+\frac{\partial}{\partial y}(Hq_y)-Q_w-q_z\big|_{z(i+1)}+q_z\big|_{z(i)}=0 \qquad (6)$$

以下のダルシー則を導入する。ただ z 方向には差分形で離散化する。

$$q_x^{(i)}=-\kappa_x\frac{\partial h^{(i)}}{\partial x},\quad q_y^{(i)}=-\kappa_y\frac{\partial h^{(i)}}{\partial y},$$
$$q\big|_{z(j)}=-\kappa_z\frac{h^{(i)}-h^{(i-1)}}{d^{(i)}} \qquad (7)$$

(7)式を(6)式に代入して、符号を整理すると以下の式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(H\kappa_x\frac{\partial h^{(i)}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(H\kappa_y\frac{\partial h^{(i)}}{\partial y}\right)+Q_w \qquad (8)$$
$$+\frac{\kappa_z}{d^{(i+1)}}\left(-h^{(i+1)}+h^{(i)}\right)+\frac{\kappa_z}{d^{(i)}}\left(h^{(i)}-h^{(i-1)}\right)=0$$

(8)式に有限要素法を適用して、平面的に離散化する。

$$\int_V \Big[\ h^{(i)*}\frac{\partial}{\partial x}\left(H\kappa_x\frac{\partial h^{(i)}}{\partial x}\right)+h^{(i)*}\frac{\partial}{\partial y}\left(H\kappa_y\frac{\partial h^{(i)}}{\partial y}\right)+h^{(i)*}Q_w$$
$$+\frac{\kappa_z}{d^{(i+1)}}h^{(i)*}\left(-h^{(i+1)}+h^{(i)}\right)+\frac{\kappa_z}{d^{(i)}}h^{(i)*}\left(-h^{(i-1)}+h^{(i)}\right)\ \Big]dV=0 \qquad (9)$$

(9)式の z 方向の各層を足し合わせて全体の有限要素法の関係式を定式化しマトリクス表示すると次式となる。

$$\begin{bmatrix} S_{\alpha\beta}^{(i-1)}+M_{\alpha\beta}^{(j)}+M_{\alpha\beta}^{(j-1)} & -M_{\alpha\beta}^{(j)} & 0 \\ -M_{\alpha\beta}^{(j)} & S_{\alpha\beta}^{(i)}+M_{\alpha\beta}^{(j+1)}+M_{\alpha\beta}^{(j)} & -M_{\alpha\beta}^{(j+1)} \\ & -M_{\alpha\beta}^{(j+1)} & S_{\alpha\beta}^{(i+1)}+M_{\alpha\beta}^{(j+2)}+M_{\alpha\beta}^{(j+1)} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} h_\beta^{(i-1)} \\ h_\beta^{(i)} \\ h_\beta^{(i+1)} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \Omega_\alpha^{(i+1)} \\ \Omega_\alpha^{(i)} \\ \Omega_\alpha^{(i+2)} \end{Bmatrix} \qquad (10)$$

ここで、水平の地下水解析の方程式と比較して新たに追加された項のみを抽出すると次式となる。

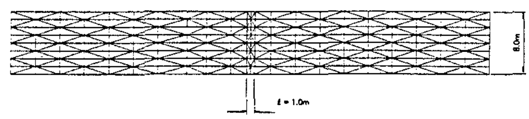
$$\begin{bmatrix} M_{\alpha\beta}^{(j+1)} & -M_{\alpha\beta}^{(j+1)} \\ -M_{\alpha\beta}^{(j+1)} & M_{\alpha\beta}^{(j+1)} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} h_\beta^{(i)} \\ h_\beta^{(i+1)} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \Omega_\alpha^{(i)} \\ \Omega_\alpha^{(i+1)} \end{Bmatrix} \qquad (11)$$

(11)式は、長さ $d^{(j+1)}$、透水係数 κ_z の一次元の地下水の定式化と同じ結果となる。したがって、マルチレイアーモデルの計算は、既存の二次元解析と一次元解析の組み合わせで計算が可能であることがわかる。

3. 数値解析例

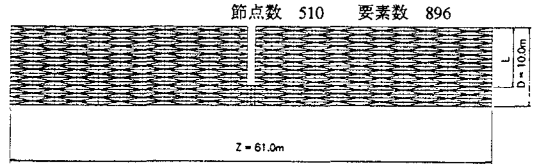
鉛直モデルとマルチレイアーモデルでの計算結果を比較する。マルチレイアーモデルは、平面計算モデルを多層に重ね、その間を一次元モデルで結合する。マルチモデルの一層の有限要素分割を図－2に示す。鉛直計算の要素分割図を図―3 に示す。図―2 の要素を 20 枚かさねてマルチレイアーモデルとする。鉛直モデルとマルチレイアーモデルの水頭分布の比較を図－4 に示す。両者は良く一致した。

節点数 207　　要素数 352

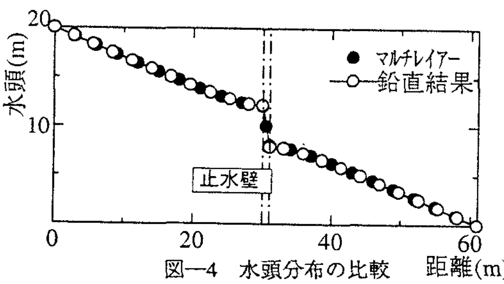


図―2　マルチモデルの第一層の有限要素分割図

節点数 510　　要素数 896



図―3　鉛直モデルの有限要素分割図



図―4　水頭分布の比較

4. 考察

以上の定式化からマルチレイアーモデルの解析は、理論的には三次元解析と、なんら変わりのない解析であることを示した。本報告では、鉛直解析との比較にとどまったが、マルチレイアーモデルの計算で止水壁による鉛直流れが計算できることがわかった。図化機能も従来の二次元計算用のものがそのまま流用できる利点がある。計算機が発達した現在、マルチモデルのようなモデル化に時間を使うより三次元計算を直接計算するほうが効率的であるという議論もある。しかし、三次元計算は一要素に 8 ケのガウス積分点があり、二次元要素は、上下の三角要素と上下の一元要素で 8 ケの積分だが、鉛直要素は、となりの要素との共有分だけ積分が減少して、計算時間が早くなると考えられる。

参考文献

(1) M.M.Aral, Ground Water Modeling in Multilayer Aquifers, Lewis Publishers,1990
(2) 西垣、河野、白石：数値解析による二次元・三次元カップリング浸透流解析手法の開発「土木学会第 43 回年次学術講演会」Ⅲ-413、pp.868-869,1988
(3) 金子、川原：マルチレイアー浸透流モデルによる止水壁を含む領域での浸透流解析「第 10 回数値流体力学シンポジウム」pp.320-321,1996