

Ⅲ-B124

直交2軸方向に対称荷重を受ける円形2層リングの構造解析

東京都立大学名誉教授 正会員 山本 稔
クボタ建設 正会員 原田 昌弘
大日本土木 正会員 畑 一民

1. はじめに

シールドトンネルの二次覆工は、セグメントリングとともに2層リングを形成する。二次覆工とセグメントとの一体化をねらって、セグメントの内側面にジベル筋を配置するが、その効果には不明なところがある。また、TLライニング (Two Layer Lining) 工法は、セグメントを型枠とし、その外側に外周コンクリートを打設し、両者の一体化で覆工を形成する工法であるが、ここでも2層構造の検討が求められる。

このような観点から、円形2層リングの力学的挙動について解析を試みた。

2. 仮定と基本式

図-1のような2層リングを取り扱うに当たって設けた仮定は以下の通りである。

- 1) 各円形リングは、均質な弾性体であり、厚さ t_1, t_2 は図心半径 r_1, r_2 に比して小さく、微小変形の直線ばり理論が成立つ。
- 2) 荷重は、鉛直・水平の2軸に対称であり、かつ半径方向のみ作用する。
- 3) 2層リングの境界面は円周方向にずれを許すが半径方向には密着している。ずれは境界面のせん断応力に比例する。

仮定に従い、リング幅Bに作用する荷重Fを次式で表す。

$$F = \sum_{n=1}^{\infty} B P f_n \cos 2n\theta \quad (1)$$

ここにPは応力度と同じ単位の定数、nは整数、 f_n は級数の第n項の係数である。

境界面には半径方向応力 $\bar{r}$ 、円周方向のせん断応力 $\bar{\tau}$ が作用する。 $\bar{r}$ は荷重分布に近いと考えて、 $\bar{\tau}$ は荷重の対称性から

$$\bar{r} = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{r}_n = \sum_{n=1}^{\infty} p \bar{c}_n \cos 2n\theta \quad (2)$$

ここに $\bar{c}_n, \bar{c}_n'$ は級数の第n項の係数である。

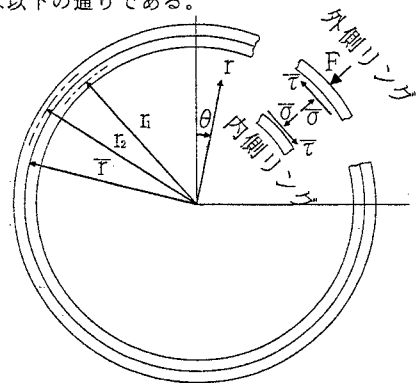


図-1 2層リング

$$\bar{\tau} = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\tau}_n = \sum_{n=1}^{\infty} p \bar{c}_n' \sin 2n\theta \quad (3)$$

図-1を参照して内、外リングの断面力と変位を求めれば、表-1のようになる。

表-1 断面力および変位

	内側リング	外側リング
曲げモーメント	$M_1 = \sum_{n=1}^{\infty} M_{1,n}$ $= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B P r_1^2}{4n^2-1} \left(\bar{c}_n + \frac{1}{2n} \bar{c}_n' \right) \cos 2n\theta \quad (4.1a)$	$M_2 = \sum_{n=1}^{\infty} M_{2,n}$ $= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B P r_2^2}{4n^2-1} \left(f_n - \bar{c}_n - \frac{1}{2n} \bar{c}_n' \right) \cos 2n\theta \quad (5.1a)$
軸力	$N_1 = \sum_{n=1}^{\infty} N_{1,n}$ $= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B P r_1}{4n^2-1} \left(\bar{c}_n + 2n \bar{c}_n' \right) \cos 2n\theta \quad (4.1b)$	$N_2 = \sum_{n=1}^{\infty} N_{2,n}$ $= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B P r_2}{4n^2-1} \left(f_n - \bar{c}_n - 2n \bar{c}_n' \right) \cos 2n\theta \quad (5.1b)$
半径方向変位	$u_1 = \sum_{n=1}^{\infty} u_{1,n}$ $= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2} \cdot \frac{B P r_1^4}{E_1 I_1} \left(\bar{c}_n + \frac{1}{2n} \bar{c}_n' \right) \cdot \cos 2n\theta$ $+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2} \cdot \frac{B P r_1^2}{E_1 A_1} \left(\bar{c}_n + 2n \bar{c}_n' \right) \cdot \cos 2n\theta \quad (4.2a)$	$u_2 = \sum_{n=1}^{\infty} u_{2,n}$ $= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2} \cdot \frac{B P r_2^4}{E_2 I_2} \left(f_n - \bar{c}_n - \frac{1}{2n} \bar{c}_n' \right) \cdot \cos 2n\theta$ $+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2} \cdot \frac{B P r_2^2}{E_2 A_2} \left(f_n - \bar{c}_n - 2n \bar{c}_n' \right) \cdot \cos 2n\theta \quad (5.2a)$
円周方向変位	$v_1 = \sum_{n=1}^{\infty} v_{1,n}$ $= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(4n^2-1)^2} \cdot \frac{B P r_1^4}{E_1 I_1} \left(\bar{c}_n + \frac{1}{2n} \bar{c}_n' \right) \cdot \sin 2n\theta$ $+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(4n^2-1)^2} \cdot \frac{B P r_1^2}{E_1 A_1} \left(\bar{c}_n + 2n \bar{c}_n' \right) \cdot \sin 2n\theta \quad (4.2b)$	$v_2 = \sum_{n=1}^{\infty} v_{2,n}$ $= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(4n^2-1)^2} \cdot \frac{B P r_2^4}{E_2 I_2} \left(f_n - \bar{c}_n - \frac{1}{2n} \bar{c}_n' \right) \cdot \sin 2n\theta$ $+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(4n^2-1)^2} \cdot \frac{B P r_2^2}{E_2 A_2} \left(f_n - \bar{c}_n - 2n \bar{c}_n' \right) \cdot \sin 2n\theta \quad (5.2b)$

※断面力の符号は図-2参照。半径方向変位は内向きが正、円周方向変位は θ (図-1) の方向が正。

キーワード：TLライニング、円形2層リング 〒207 東大和市南街3-56-2 大日本土木 tel0425-64-5171 fax0425-64-5849

3. 連続条件と解

境界面における半径方向変位 $\bar{u}_1$ と $\bar{u}_2$ は等しい。これを図心線の変位で表し

$$\bar{u}_{1,n} = \bar{u}_{2,n}$$

円周方向のずれの弾性係数を k 、境界面の円周方向変位を $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ として

$\bar{v} = k(\bar{v}_2 - \bar{v}_1)$ が成立つ。これを θ で微分し、 $\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2$ を境界の直ひずみとすれば

$$\frac{1}{\bar{r}} \cdot \frac{d\bar{v}}{d\theta} = \frac{k}{\bar{r}} \left(\frac{d\bar{v}_2}{d\theta} - \frac{d\bar{v}_1}{d\theta} \right) = k(\bar{\varepsilon}_2 - \bar{\varepsilon}_1)$$

ここに $\bar{r}$ は境界面の半径。(3), (4・1), (5・1)を考慮して級数の第 n 項を書けば

$$\frac{1}{\bar{r}} \cdot \frac{d\bar{v}}{d\theta} = \frac{k}{E_2} \left(\frac{M_{2,n} \cdot t_2}{I_2 \cdot 2} - \frac{N_{2,n}}{A_2} \right) + \frac{k}{E_1} \left(\frac{M_{1,n} \cdot t_1}{I_1 \cdot 2} + \frac{N_{1,n}}{A_1} \right) \quad (7)$$

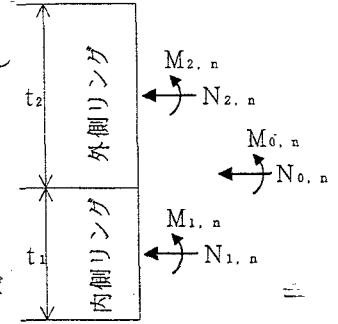


図-2 2層リングの断面力

(6), (7)式に(3)～(5)式を代入し無次元化をはかって次のように置けば、 $\bar{c}_n$ と $\bar{c}_n'$ に関する連立方程式を得る。

$$d_1 = \frac{r_1}{t_1}, \quad d_2 = \frac{r_2}{t_2}, \quad e = \frac{E_2}{E_1}, \quad g = \frac{r_2}{r_1}, \quad j = \frac{E_1}{k\bar{r}} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} (12gd_2^3 + gd_2 + 12ed_1^3 + ed_1) \bar{c}_n + \left(\frac{6}{n}gd_2^3 + 2ngd_2 + \frac{6}{n}ed_1^3 + 2ned_1 \right) \bar{c}_n' &= gd_2(12d_2^2 + 1)f_n \\ (6d_2^2 + d_2 - 6ed_1^2 + ed_1) \bar{c}_n + \left(\frac{3}{n}d_2^2 + 2nd_2 - \frac{3}{n}ed_1^2 + 2ned_1 + 2n(4n^2 - 1)ej \right) \bar{c}_n' &= d_2(6d_2 + 1)f_n \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{c}_n &= \frac{gd_2(12d_2^2 + 1)(3d_2^2 - 3ed_1^2 + 2n^2d_2 + 2n^2ed_1) - 2d_2(6d_2 + 1)(3gd_2^3 + 3ed_1^3 + n^2gd_2 + n^2ed_1) + 2n^2(4n^2 - 1)(12d_2^2 + 1)d_2ej}{(4n^2 - 1)[-3(d_2^2 - ed_1^2)(gd_2 + ed_1) + 6(d_2 + ed_1)(gd_2^3 + ed_1^3) + 2n^2ej(12gd_2^3 + 12ed_1^3 + gd_2 + ed_1)]} \cdot f_n \\ \bar{c}_n' &= \frac{n[-gd_2(12d_2^2 + 1)(6d_2^2 - 6ed_1^2 + d_2 + ed_1) + d_2(6d_2 + 1)(12gd_2^3 + 12ed_1^3 + gd_2 + ed_1)]}{(4n^2 - 1)[-3(d_2^2 - ed_1^2)(gd_2 + ed_1) + 6(d_2 + ed_1)(gd_2^3 + ed_1^3) + 2n^2ej(12gd_2^3 + 12ed_1^3 + gd_2 + ed_1)]} \cdot f_n \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

(10)式を(4), (5)式に代入して断面力と変位が求まる。

4. 曲げ剛性の有効率

2層リングの断面に作用する合力 M_0, N_0 を

$$M_0 = \sum_{n=1}^{\infty} M_{0,n}, \quad N_0 = \sum_{n=1}^{\infty} N_{0,n}$$

と置いて荷重に對置すれば、第 n 項について

$$\left. \begin{aligned} M_{0,n} &= M_{1,n} + M_{2,n} + \frac{1}{4}(t_1 + t_2)(N_{2,n} - N_{1,n}) \\ N_{0,n} &= N_{1,n} + N_{2,n} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$k \rightarrow \infty$ の場合における2層リングの曲げ剛性を J とし、 k が有限の時に荷重の第 n 項に對するこのリングの曲げ剛性は ϕ_n に低下すると考える。また、この2層リングの半径方向変位を $u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} u_{0,n}$ として荷重に對応させれば、 $u_{0,n} = u_{1,n} = u_{2,n}$ であり、 r_0 を図心半径として

$$\frac{d^2 u_{0,n}}{r_0^2 d\theta^2} \div \frac{M_{0,n}}{\phi_n J}, \quad \frac{d^2 u_{1,n}}{r_1^2 d\theta^2} \div \frac{M_{1,n}}{E_1 I_1}, \quad \frac{d^2 u_{2,n}}{r_2^2 d\theta^2} \div \frac{M_{2,n}}{E_2 I_2}$$

$$\frac{r_1^2 M_{1,n}}{E_1 I_1} \div \frac{r_2^2 M_{2,n}}{E_2 I_2} \div \frac{r_0^2}{\phi_n J} \left\{ M_{1,n} + M_{2,n} + \frac{1}{4}(t_1 + t_2)(N_{2,n} - N_{1,n}) \right\}$$

この関係から

$$\phi_n = \frac{E_1 I_1 + E_2 I_2 \cdot r_0^2 \{ M_{1,n} + M_{2,n} + 1/4(t_1 + t_2)(N_{2,n} - N_{1,n}) \}}{r_1^2 M_{1,n} + r_2^2 M_{2,n}}$$

ϕ_n は無次元の係数であり、 $n=1$ の場合のみでもリングの挙動を調べることができると思われる。そこで $\phi = \phi_1$ とし、 ϕ を2層リングの曲げ剛性の有効率と呼ぶ。

$$\phi = \phi_1 = \frac{E_1 I_1 + E_2 I_2 \cdot r_0^2 \{ M_{1,1} + M_{2,1} + 1/4(t_1 + t_2)(N_{2,1} - N_{1,1}) \}}{r_1^2 M_{1,1} + r_2^2 M_{2,1}}$$

5. おわりに

図-3の例から境界面の結合が比較的小さくても、曲げ剛性の有効率は大きく、 $k \rightarrow \infty$ の完全合成構造に近いことがわかる。この研究が2層リングの挙動を通じてトンネル覆工の合理化に役立つことを願っている。
参考文献：原田他 「TLライニング工法の開発(その6)」土木学会 第52回 年次学術講演会、1997.9.

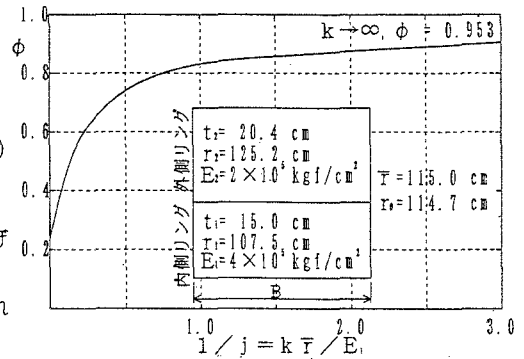


図-3 曲げ剛性の有効率の例