Ⅱ-301 対数則とベキ乗則に関連した二・三の計算補足

日本大学工学部 正会員 木村喜代治

1．まえがき

よく知られているように，円管内の流れおよび二次元流れの抵抗および流速分布に関する一般則は対数則であり，これに対し一つの経験則としてベキ乗則がある。ベキ乗則は一つのベキ指数に対し粗面水路であれば相対粗度の，また滑面水路であればReynolds数のある範囲で対数則の計算値に近似する。相対粗度あるいはReynolds数の範囲が変わればベキ指数を変えることにより対数則の計算値に対応される。ベキ指数は1/m（mは整数をとる）で表わす。本報はmを3～10の範囲を対象に，各種係数を計算しこれまでに示されている値と比較し，Manning-Strickler式の粗度の評価などを示す。

2．基本計算

対数則とベキ乗則とより最大流速 v_{max} および平均流速 v を一致させると，あるmにつき流速係数 v/v_* は一定値となる。このとき粗面水路であれば相対粗度が，また滑面水路であればReynolds数が一定値となる。ベキ乗則のそのときの流速分布式を求める。これより平均流速を計算し，この式の流速係数 v/v_* を粗面なら相対粗度の，滑面ならReynolds数の関数として示す。これらの流速分布式および流速係数をそのmの値に対応する式とする。さらに摩擦係数も同様にして表わす。

（1）円管内の流れ

対数則： $\dfrac{v_{max}-u}{v_*}=\dfrac{1}{k}\ln\left(\dfrac{r}{y}\right)$ （1），　ベキ乗則： $\dfrac{u}{v_{max}}=\left(\dfrac{y}{r}\right)^{1/m}$ （2）

式（1）より $\dfrac{v}{v_*}=\dfrac{v_{max}}{v_*}-\dfrac{3}{2k}$ （3），　式（2）より $\dfrac{v_{max}}{v_*}=\dfrac{(m+1)(2m+1)}{2m^2}\dfrac{v}{v_*}$ （4）

ここで式（3），（4）で $\dfrac{v_{max}}{v_*}$ を消去すると $\left(\dfrac{v}{v_*}\right)_0=\dfrac{3m^2}{(3m+1)k}$ （5） となる。なを

v：平均流速，v_{max}：最大流速，u:壁面からyの流速，v_*：摩擦速度，k：Karman定数，suffix 0は対数則とベキ乗則でvと v_{max} を一致させたときの量を示す。

①粗面管路

粗面管路における対数則より $\left(\dfrac{r}{k_s}\right)_0=\exp\left[k\left\{\left(\dfrac{v}{v_*}\right)_0-4.75\right\}\right]$ （6） この条件のもとで

ベキ乗則の流速分布式は $\dfrac{u}{v_*}=\dfrac{(m+1)(2m+1)}{2m^2}\left(\dfrac{v}{v_*}\right)_0\left(\dfrac{k_s}{r}\right)_0^{1/m}\left(\dfrac{y}{k_s}\right)^{1/m}=c_r\left(\dfrac{y}{k_s}\right)^{1/m}$ （7） c_r を定数

とし，この付近の相対粗度に対し $\dfrac{v}{v_*}=\left(\dfrac{v}{v_*}\right)_0\left(\dfrac{k_s}{r}\right)_0^{1/m}\left(\dfrac{r}{k_s}\right)^{1/m}=\gamma_r\left(\dfrac{r}{k_s}\right)^{1/m}$ （8） で近似する。

ベキ乗則，流れの抵抗則

〒963 郡山市田村町徳定字中河原1， TEL 0249-56-8719，FAX 0249-56-8858

このとき，摩擦係数λは　$\lambda=\dfrac{8}{\gamma_r^2}\left(\dfrac{r}{k_s}\right)^{-2/m}=\eta_r\left(\dfrac{r}{k_s}\right)^{-2/m}$　（９）　で表わす。

②滑面管路

滑面管路における対数則より　$\left(R_e\right)_0=\left(\dfrac{vd}{\nu}\right)_0=2\left(\dfrac{v}{v_*}\right)_0\exp\left[k\left\{\left(\dfrac{v}{v_*}\right)_0-1.75\right\}\right]$　(10)　このとき

ベキ乗則の流速分布　$\dfrac{u}{v_*}=\dfrac{(m+1)(2m+1)}{2m^2}\left(\dfrac{v}{v_*}\right)_0^{(m+1)/m}\left(\dfrac{2}{R_e}\right)_0^{1/m}\left(\dfrac{v_*y}{\nu}\right)^{1/m}=c_s\left(\dfrac{v_*y}{\nu}\right)^{1/m}$　(11)，式(8)，(9)

と同様に　$\dfrac{v}{v_*}=\gamma_s\left(\dfrac{v_*r}{\nu}\right)^{1/m}$　(12)，$\lambda=\dfrac{8}{\gamma_s^{\,2m/(m+1)}(1/2)^{2/(m+1)}}R_e^{\,-2/(m+1)}=\eta_s R_e^{\,-2/(m+1)}$　(13)

（２）<u>二次元流れ</u>

式(1)より $\dfrac{v}{v_*}=\dfrac{v_{max}}{v_*}-\dfrac{1}{k}$　(14)，式(2)より $\dfrac{v}{v_*}=\dfrac{m}{m+1}\dfrac{v_{max}}{v_*}$　(15)　両式より $\left(\dfrac{v}{v_*}\right)_0=\dfrac{m}{k}$　(16)

①粗面水路

対数則より $\left(\dfrac{h}{k_s}\right)_0=\exp\left[k\left\{\left(\dfrac{v}{v_*}\right)_0-6.0\right\}\right]$　(17)，　ベキ乗則より $\dfrac{u}{v_*}=\dfrac{m+1}{m}\left(\dfrac{v}{v_*}\right)_0\left(\dfrac{k_s}{h}\right)_0^{1/m}\left(\dfrac{y}{k_s}\right)^{1/m}$

$=c_r\left(\dfrac{y}{k_s}\right)^{1/m}$　(18)，よって　$\dfrac{v}{v_*}=\gamma_r\left(\dfrac{h}{k_s}\right)^{1/m}$　(19)，$\lambda=\dfrac{8}{\gamma_r^2}\left(\dfrac{h}{k_s}\right)^{-2/m}=\eta_r\left(\dfrac{h}{k_s}\right)^{-2/m}$　(20)

②　滑面水路

対数則より $\left(\dfrac{v_*h}{\nu}\right)_0=\exp\left[k\left\{\left(\dfrac{v}{v_*}\right)_0-3.0\right\}\right]$　（２１），ベキ乗則より $\dfrac{u}{v_*}=\dfrac{m+1}{m}\left(\dfrac{v}{v_*}\right)_0\left(\dfrac{v_*h}{\nu}\right)^{-1/m}\left(\dfrac{v_*y}{\nu}\right)^{1/m}$

$=c_s\left(\dfrac{v_*y}{\nu}\right)^{1/m}$　(22)，よって $\dfrac{v}{v_*}=\gamma_s\left(\dfrac{v_*h}{\nu}\right)^{1/m}$　(23)，$\lambda=\dfrac{8}{\gamma_s^{\,2m/(m+1)}}\left(\dfrac{vh}{\nu}\right)^{-2/(m+1)}=\eta_s\left(\dfrac{vh}{\nu}\right)^{-2/(m+1)}$　(24)

以上の各式で表わされている基本係数の計算結果を下表に示す。この表はｍが3～10について上記の式で機械的に計算した結果を示してあるので層流域の流れとか対数則の成立が疑問の領域も含まれている。

３．対数則とベキ乗則の関係

円管内の流れおよび二次元流れのそれぞれの壁面粗面と壁面滑面の場合について，対数則とベキ乗則の計算結果の比較は講演時に示す。

４．Manning-Stricklerの粗度とNikuradseの粗度の関係その他

Stricklerの粗度をk_{ms}，とし円管流で$k_s=1.85k_{ms}$，二次元流で$k_s=1.54k_{ms}$。

円管流基本係数

m	$(v/v_*)_0$	$(r/k_s)_0$	$(v_*r/\nu)_0$	C_r	γ_r	C_s	γ_s	v/v_{max}	$(vd/\nu)_0$	η_r	η_s
3	6.75	2.226	7.389	8.042	5.170	5.391	3.466	0.6429	99.8	0.2993	1.754
4	9.231	6.003	19.93	8.293	5.897	6.143	4.369	0.7111	368.0	0.2300	0.9976
5	11.72	16.24	53.92	8.858	6.711	6.968	5.279	0.7576	1264	0.1777	0.6298
6	14.21	44.00	146.1	9.559	7.563	7.826	6.192	0.7912	4152	0.1399	0.4282
7	16.70	119.3	396.2	10.33	8.436	8.703	7.107	0.8167	13235	0.1124	0.3075
8	19.2	323.8	1075	11.14	9.322	9.591	8.024	0.8366	41277	0.09205	0.2303
9	21.70	878.8	2918	11.98	10.22	10.49	8.941	0.8526	126610	0.07665	0.1782
10	24.19	2386	7922	12.84	11.12	11.39	9.859	0.8658	383330	0.06475	0.1415

二次元流基本係数

m	$(v/v_*)_0$	$(h/k_s)_0$	$(v_*h/\nu)_0$	C_r	γ_r	C_s	γ_s	v/v_{max}	$(vh/\nu)_0$	η_r	η_s
3	7.5	1.822	6.050	8.187	6.140	6.488	4.116	0.75	45.4	0.2122	0.9580
4	10	4.953	16.44	8.379	6.703	6.207	4.966	0.8	164.4	0.1780	0.6159
5	12.5	13.46	44.70	8.918	7.432	7.016	5.846	0.8333	558.8	0.1449	0.4217
6	15	36.60	121.5	9.604	8.232	7.863	6.740	0.8571	1823	0.1180	0.3038
7	17.5	99.48	330.3	10.37	9.071	8.733	7.642	0.875	5780	0.09723	0.2278
8	20	270.4	897.8	11.17	9.932	9.617	8.548	0.8889	17957	0.08110	0.1764
9	22.5	735.1	2441	12.01	10.81	10.51	9.458	0.9	54914	0.06850	0.1402
10	25	1998	6634	12.86	11.69	11.41	10.37	0.9091	165856	0.05852	0.1138