II －268

有限要素法による二次元氾濫解析

ニュージェック仙台支店　正会員　邵　小敏
同上　正会員　太田　良雄

1．はじめに

河川堤防の決壊・越流や内水氾濫に伴う洪水災害の危険度を的確に評価して、それらのハード・ソフト的対策を検討するためには洪水氾濫解析手法の確立および解析結果のビジュアル化（ＣＧ表示）が必要である。解析手法については、タンク法や差分法を適用する２次元モデルが提案されているが、複雑な地形との適用性のよい有限要素法を用いた例は少ない[1]。また、解析結果（氾濫水の流動状況）をwindows95対応パソコンを用いてリアルタイムで動画表示するシステムの開発例は少ないと思われる。

本研究は、特性有限要素法による二次元氾濫解析の提案及び解析結果のＣＧ表示システムの開発に関するものである。

2．有限要素法による氾濫解析

（1） 基本方程式

$$\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(Hu)+\frac{\partial}{\partial y}(Hv)=0 \quad \cdots(1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+g\frac{\partial h}{\partial x}+uR=0 \quad \cdots(2) \qquad \frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+g\frac{\partial h}{\partial y}+vR=0 \quad \cdots(3)$$

ここで、Hは水深(m)、u、vはx軸及びy方向の流速（m/s）、hは水位（m）（=H＋ζ）、ζは地表面より下に設定する基準座標平面に対する地形標高（m）、gは重力加速度（m/s^2）である。またRは次式で表す摩擦項で、同式中のnはマニング粗度係数である。

$$R=n^2g\sqrt{u^2+v^2}/H^{4/3}\cdots\cdots\cdots(4)$$

（2）方程式の離散化

基本方程式を特性曲線有限要素法により離散化する。特性曲線有限要素法は、運動量式における非線形移流項の計算に対しては特性曲線を用いて離散化し、その他の項の計算に対しては有限要素法を用いて離散化するものである[2]。

特性曲線を(5)、(6)式のように定義すれば、運動量式は式(7)、(8)式のように書き換えられる。

$$\frac{dx}{dt}=u \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(5) \qquad \frac{dy}{dt}=v \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

$$\frac{du}{dt}+g\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial h}{\partial x}+uR=0 \quad \cdots\cdots(7) \qquad \frac{dv}{dt}+g\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial h}{\partial x}+vR=0 \quad \cdots\cdots(8)$$

ここに、$du/dt, dv/dt$は特性曲線に沿って、x及びy方向の速度に対する時間微分である。

運動量式(7)、(8)及び連続式(1)を有限要素法で離散化すれば、下記諸式が得られる。

$$A_{ij}H_{tj}-C^x_{ijk}H_ku_j-C^y_{ijk}H_kv_j+B_i=0 \quad (9)$$

$$A_{ij}u_{tj}+gK^x_{ij}h_j+F_{ijk}R_ku_j=0 \quad \cdots(10) \qquad A_{ij}v_{tj}+gK^y_{ij}h_j+F_{ijk}R_kv_j=0 \quad \cdots(11)$$

キーワード：氾濫解析、氾濫区域、洪水流、有限要素法、ＣＧ表示
〒９８０　宮城県仙台市青葉区本町１－１１－２　TEL 022(262)1951　FAX 022(262)1930

ここで、添字 i、j は節点番号を、t は時間に対する微分を表す。解析区域を三角形要素で分割すれば、マットリクス A、C^x、C^y、B、K^x、K^y、F はそれぞれ以下のように与えられる。

$$C^x_{ijk}=\frac{b_i}{2s}M_{jk}\qquad C^y_{ijk}=\frac{c_i}{2s}M_{jk}\qquad B_i=\int_\Gamma q_n N_i d\Gamma\qquad K^x_{ij}=\frac{s}{3}\cdot\frac{b_j}{2s}=\frac{b_j}{6}\qquad K^y_{ij}=\frac{s}{3}\cdot\frac{c_j}{2s}=\frac{c_j}{6}$$

$$A_{ij}=\begin{cases}\frac{s}{6} & i=j\\ \frac{s}{12} & i\neq j\end{cases}\qquad F_{ijk}=\begin{cases}\frac{s}{60} & i\neq j\neq k\\ \frac{s}{10} & i=j=k\\ \frac{s}{30} & \text{その他}\end{cases}$$

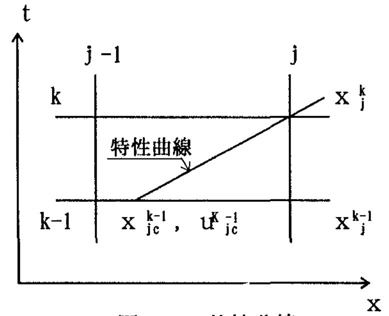
$$s=\frac{1}{2}(a_1+a_2+a_3)\qquad a_i=x_jy_k-x_ky_j$$

$$b_i=y_j-y_k\qquad c_i=x_k-x_j$$

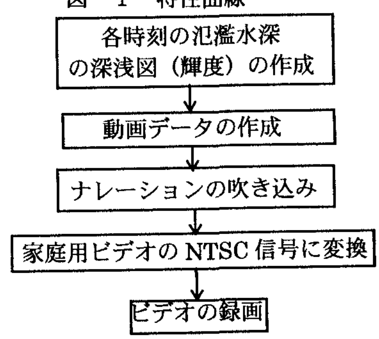
ここに、x_i、y_i は三角形要素の節点の x 、y 座標、i,j,k は三角形要素の節点番号、q_n は外法線方向の流量 Flux を表す。式(10)～(11)における u_{tj}, v_{tj} は、特性曲線に沿って時間 t に関する全微分であるので、次式のように離散化する。

$$u_{tj}=\frac{u_j^k-u_{jc}^{k-1}}{\Delta t}\quad\cdots(12)\qquad v_{tj}=\frac{v_j^k-v_{jc}^{k-1}}{\Delta t}\quad\cdots(13)$$

ここで、上付きのk は時間ステップ、下付きの j は節点番号を示す。差分化に当たっては、時・空間上の(j,k) の格子点を通る特性曲線に注目している。この点を通る特性曲線は、時刻 t^{k-1} 時には、設定された格子点を通るとは限らず、x_{jc}^{k-1} 点を通っている（図－１）。t^{k-1} での u_{jc}、v_{jc} の値は、補間によって与えられる。この補間による近似が、通常の差分化における風上差分と同等のものになっている。



図―１　特性曲線



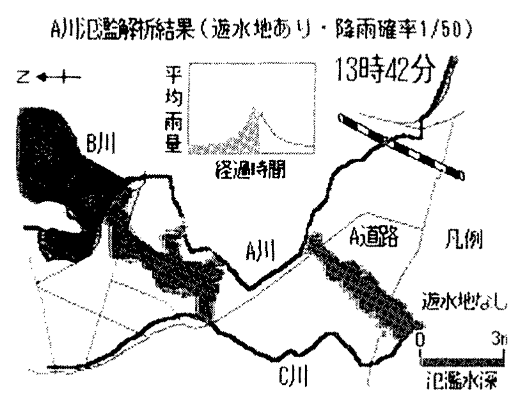
図－２　ＣＧ表示システム

３．ＣＧ表示システム

ＣＧ表示システムは図－２に示すとおりである。

４．解析結果

本研究で提案した氾濫解析システムを用いて、A 河川の氾濫解析を行った。A 河川は流域面積が約 20.0km²、流路延長は約 15km の一級河川である。下流市街地の洪水防御計画の一環として、上流に遊水地計画が進められている。遊水地の効果を検証するため、氾濫解析を行い、その結果をＣＧ表示した。ＣＧ表示結果の一例（１フレーム）を図－３に示す。



図－３　ＣＧ表示の例

５．おわりに

本研究では、①有限要素法による氾濫解析モデルを提案し、②氾濫解析結果のＣＧ表示簡易システムを構築した。

参考文献：１）岡太郎：ガラーキン・反復型有限要素法による洪水氾濫解析，水工学論文集，第３６巻.
2) 邵小敏・首藤伸夫:：自由水面を持つ流れの数値計算，東北地域災害科学研究，第 25 巻，pp47～52，1989.