土木学会第52回年次学術講演会（平成９年９月）

Ⅱ－265

高次精度移流項計算スキームの数値振動の抑制

通産省　中国工業技術研究所　正員　朝位孝二

1．まえがき

移流拡散現象をコンピューターで精度良くシミュレートするために移流項に高次精度スキームを用いることが多い．しかしながら，高次精度スキームでは勾配の急な分布の手前で数値振動を引き起こしてしまうことが知られている．最近著者は空間的に使用する格子点が三点にもかかわらず，四次精度を有するImplicit HORNETスキーム[1)]を開発したが，やはり急勾配前面で数値振動を引き起こしてしまう．Implicit HORNETスキームはパラメーターの値を調節するだけで容易に精度の次数を変更することができる．このことを利用して数値振動を抑制するための手法を検討した．

2．Implicit HORNETスキーム

Implicit HORNETスキームはスプリット・オペレータ・アプローチに基づく解法で，次式に対する計算スキームである．

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}+u\frac{\partial \Phi}{\partial x}=0 \qquad (1)$$

式（1）は一次元移流方程式である．ここで，Φは輸送物質の濃度，uは流速である．

Implicit HORNETスキームを用いて式（1）を離散化すれば以下のようになる．

$$\begin{aligned}&[-\alpha\theta-\gamma]\Phi_{i-1}^{n+1}+[1+\alpha\theta+2\gamma]\Phi_i^{n+1}+[-\gamma]\Phi_{i+1}^{n+1}\\&=[\alpha(1-\theta)+\beta-\gamma]\Phi_{i-1}^{n}+[1-\alpha(1-\theta)-2\beta+2\gamma]\Phi_i^{n}+[\beta-\gamma]\Phi_{i+1}^{n}\end{aligned} \qquad (2)$$

ここで，$\beta=\dfrac{-\alpha+\alpha^2-2\alpha^2\theta}{2}$　，$\gamma=\dfrac{(1+\alpha)(-1+\alpha-3\alpha\theta)}{6}$　，$\alpha=\dfrac{u\,\Delta t}{\Delta x}$　，$\theta=\dfrac{1}{2}$

β，γおよびθはそれぞれ二次の数値拡散項，三次の数値拡散項，四次の数値拡散項を消去するパラメーターである．Implicit HORNETスキームは時間，空間ともに４次の精度を有する．$\beta=\gamma=\theta=0$とおけば，Implicit HORNETスキームは陽形式の一次精度風上差分に帰着する．

3．モデル計算

モデル計算として次のような問題を考える．ピーク値1，標準偏差1.5m，中心位置x=150mのガウス分布，中心位置x=125m，流れ方向の半径10m，ピーク値1の半楕円分布および中心位置x=100m，上辺の長さ10m，濃度1の矩形分布の重ね合わせを初期条件とし，一定流速0.5m/secで100sec間下流方向へ移流させる．計算格子間隔はΔx=1.0m，Δt=0.2secである．

図-1に計算結果を示す．図からガウス分布のピーク値の再現性は良いが全体的に数値振動が現れ，特に矩形分布の裾の近傍や頂上付近が乱れている．Implicit HORNETスキームは偶数次の数値拡散項がないため，いったん発生した数値振動を抑制させる働きがない．次に$\theta=0$にして同様の計算を行ってみる．この場合Implicit HORNETスキームは時間，空間ともに三次精度となる．計算結果は図-2に示している．図-1と比べて数値振動は抑えられているが，矩形分布ではまだ振動が見られる．

4．数値振動の抑制

数値振動を抑える手法として勾配が急激に変化する所を判断して，局所的にスキームを一次精度におとすことが考えられる．いわゆるTVDスキームである．TVDスキームを用いれば，新たな極値は発生せず数値振動のない数値解が得られる．図-3にTVD Lax-Wendroffスキーム[2)]による計算結果を示す．数値振動は発生していないものの逆にガウス分布のピーク値までも抑え込んでしまっている．したがって，数値振動の発生を抑え，

移流計算，Implicit HORNET scheme，数値振動，TVDスキーム

〒737-01　呉市広末広2-2-2　TEL 0823-72-1922　FAX 0823-73-3284

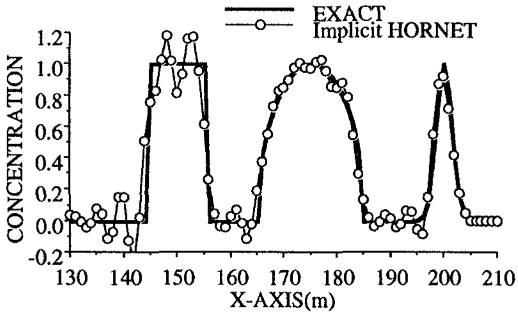

図-1　計算結果（Implicit HORNET；$\theta = 1/2$）

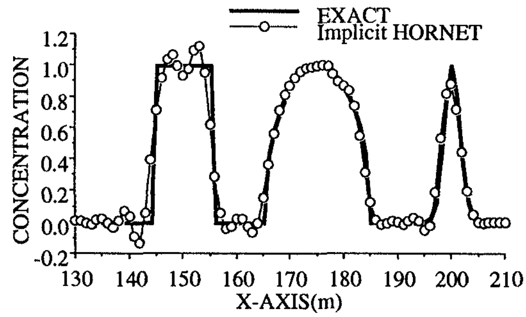

図-２　計算結果（Implicit HORNET；$\theta = 0$）

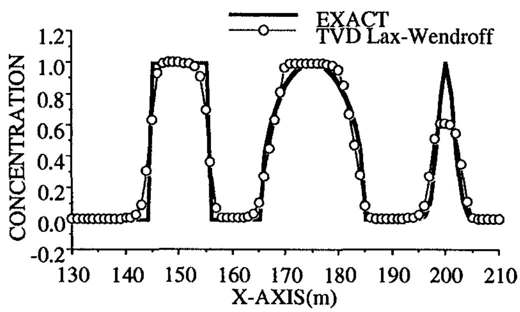

図-３　計算結果（TVD Lax-Wendroff）

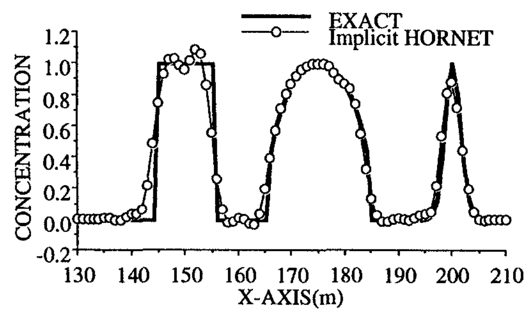

図-４　計算結果（Implicit HORNET；$\theta = 0$）

なおかつガウス分布のピーク値など物理的に意味のある極値は抑制しない方法が必要である．

ここでは以下に示す手順で数値振動を抑制することを試みる．

$$D_1 = \Phi^n_{i-1} - \Phi^n_{i-2} \quad , \quad D_2 = \Phi^n_i - \Phi^n_{i-1} \quad , \quad D_3 = \Phi^n_{i+1} - \Phi^n_i \qquad (3)$$

1）θは0に固定する．式（3）を計算する．

2）D_1とD_3の積が負の場合は式（2）をそのまま適用する．0の場合は手順3）に，正の場合は手順4）に進む．

3）$\beta = \gamma = 0$として式（2）を適用する．

4）D_1とD_2の積が0以下の場合は$\beta = \gamma = 0$として式（2）を適用する．正の場合は式（2）をそのまま適用する．

上述の手順に従って式（2）の係数を全ての格子点に関して決定し，連立方程式を解くことになる．

計算結果を図-4に示す．図-2と比較して各分布の裾の近傍の振動が小さくなっており，ガウス分布のピーク値の再現性は良好のままである．

５．おわりに

ここで示した手順によって数値振動をある程度抑えることができたが，完全には抑制してはいない．今後できるだけ簡単なアルゴリズムで，より数値振動を抑制できる手法を開発する予定である．

参考文献

1）朝位孝二・小松利光・大串浩一郎・羽田野袈裟義：移流拡散方程式の高精度数値計算手法に関する研究，土木学会論文集（投稿中）

2）Yee,H.C.:Construction of explicit and implicit symmetric TVD scheme and their application, J. Comp. Phys., 68, pp.151-179, 1987.