

II-256

非一様、一次元流れに対する MacCormack 法及び FDS 法の適用

東京建設コンサルタント 正会員 河瀬 孝司

岐阜大学工学部 正会員 藤田 一郎

1. はじめに

近年、1次元の開水路流れの数値計算法に、TVD法を用いた MacCormack 法の適用が試みられ、常射流の混在する水面形の算出で良好な結果が得られている。しかし、これらの計算は長方形断面を対象とした場合が多く、多様な断面を対象とした計算例はあまりない。従って多様な断面への適用を試み、水面形の再現性、流量の保存性についての検討を加え適用範囲等を知る必要がある。本研究の目的は非一様断面を対象とした計算結果と実験結果の比較による水面形の再現性、流量の保存性の検討である。

2. 研究方法

本研究の数値計算法は、TVD法を用いた MacCormack 法の1次元開水路基礎方程式の適用である。開水路1次元流れの一般断面に対する基礎方程式を保存形で表示すると

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (1) \quad \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} + gI_1 \right) = gA(S_0 - S_f) + gI_2 \quad (2)$$

$$\text{ただし、} \quad S_f = \frac{n^2 u^2}{R^{4/3}} \quad I_1 = \int_0^{h(x)} [h(x) - \eta] \rho(x, \eta) d\eta \quad I_2 = \int_0^{h(x)} (h - \eta) \left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right] d\eta$$

ここで、A：流水断面積、Q：流量、g：重力加速度、S₀：河床勾配、S_f：摩擦勾配、n：Manningの粗度係数、u：断面平均流速、h：水深、η：水深方向の積分変数、σ：ηにおける断面の幅である。積分項は簡単に言えば、I₁が静水圧に関する項、I₂が側圧に関する項である。

しかし、長方形断面以外では、I₁、I₂の算定には特別なアルゴリズムが必要である。この問題を回避するには(2)を以下のように変形すればよい。

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) = gA \left(S_0 - S_f - \frac{\partial h}{\partial x} \right) \quad (3)$$

この形式は、もはや保存形ではないが、MacCormack法であれば離散化は可能である。

数値計算法分野では数値振動を抑えるものとして各種のTVD法が用いられている。ここではCausonが提案し、岡部ら¹⁾が改良を加えたTVD法を用いた。

$$\text{TVD}_i = \left[G^+(r_i^+) + G^-(r_{i+1}^-) \right] (U_{i+1} - U_i) - \left[G^+(r_{i-1}^+) + G^-(r_i^-) \right] (U_i - U_{i-1}) \quad (7)$$

$$G^+(r_i^+) = \frac{|v| \pm v}{4} (1 - |v|) \{ 1 - \Phi(r_i^+) \} \quad (8) \quad r_i^- = (U_{i+1} - U_i) / (U_i - U_{i-1}) \quad (9)$$

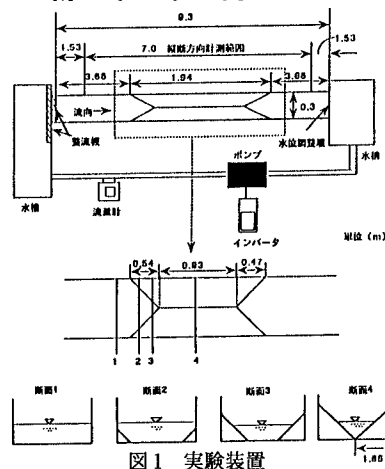
v：クーラン数、Φ：流束制限関数である。

3. 実験概要

実験には水路長7.0m、水路幅0.3m、水路勾配0.009875の直線水路を用いた。水路途中区間で流水断面が右図に示すように長方形→六角形→台形→三角形のように変化することにより流況が様々に変化する。水深計測はデジタルポイントゲージを用い横断方向に3～5点を計測し、その値を単純平均し実験値とした。

4. 結果及び考察

実験結果と解析結果の比較における水面形の再現で誤差が生じているのは流水断面が長方形→三角形に変化する漸縮部においてである。この誤差の原因と考えられるのは、著しい流線の湾曲によって(2)式において仮定している水



キーワード TVD. FDS. 跳水

〒501-11 岐阜市柳戸1番1 TEL 058-293-2433 E-mail fujita@gumail.cc.gifu-u.ac.jp

圧の静水圧分布から外れることである。この問題を回避するには、2次、3次元の解析が必要である。その他における水面形の再現性は良好（図2）である。

本研究は定常流の解析である。従って本来、流量は一定でなければならない。しかし、離散化や打ち切り誤差により、特に跳水の前後で流入流量を基準に数%の振動が生ずる。しかも、(3)のような非保存形の式を用いて解析する場合、跳水後の断面で流量は増長する。一般に支配方程式が保存を表示したものであるなら、数値計算する場合も支配方程式を保存形で表示するのが望ましい。

従って I_1, I_2 の算定は複雑になるが (2) のような保存形の式を用いて解析する必要がある。そこで保存形の差分法として圧縮性流体における衝撃波捕獲法のひとつである FDS (Flux Difference splitting) 法が考えられる。この方法は、1次元上差分法をシステムの方程式に拡張したものである。このままでは1次精度であるが、MUSCL法を用いることにより先程の TVD-MacCormack よりも高次精度のスキームにすることが期待できる。この方法は多少のベクトル演算が必要であり、計算時間も増すが高次精度の結果が得られると考えられる。

FDS 法による離散化は

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (E_{i+1/2} - E_{i-1/2}) + \Delta t C_i^n$$

MUSCL 法による数値流束は

$$E_{i+1/2} = \frac{1}{2} \{ E(U_R) + E(U_L) - |A|_{i+1/2} (U_R - U_L) \}$$

ただし、 $|A|_{i+1/2} = R_{i+1/2} |A|_{i+1/2} R_{i+1/2}^{-1}$

A は流束ヤコビアン行列で $\partial E / \partial U$ として求められる。

R : A の右固有ベクトル、 Λ : A の対角行列である。

$$(U_L)_{i+1/2} = U_i + \frac{1}{4} \{ (1-\kappa) \bar{\Delta}_- + (1+\kappa) \bar{\Delta}_+ \}$$

$$(U_R)_{i+1/2} = U_{i+1} + \frac{1}{4} \{ (1-\kappa) \bar{\Delta}_+ + (1+\kappa) \bar{\Delta}_- \}$$

ただし、

$$\kappa = 1/3, \quad \bar{\Delta}_- = \min \text{mod}(\Delta_-, b\Delta_+)$$

$$b = \frac{3-\kappa}{1-\kappa}, \quad \Delta_+ = u_{i+1} - u_i, \quad \Delta_- = u_i - u_{i-1} \text{ である。}$$

図3bから流量の保存性においてFDS法がTVD-MacCormack法より優れているのが分かる。

5. おわりに

水路実験と解析結果との比較を通して、水圧の非静水圧性を除けば一般断面においても計算が可能であることが示された。今後はFDSとの解析結果の比較、検討をし、2次、3次元への拡張を行う必要がある。

【参考文献】

- 1) 岡部 健二、穴瀬 康雄、榎本 真二：固定床の露出を伴う混合砂礫の1次元河床変動計算法、土木学会第51回年次学術講演会、pp.598-599, 1996
- 2) Cunge, J., A. Holly, Jr., F. M. Verwey, A.: PRACTICAL ASPECT OF COMPUTATIONAL RIVER HYDRAULICS, pp.8-15, 1989

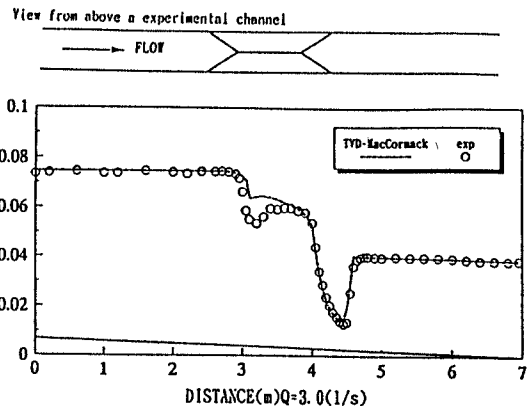


図2 水面形の再現性

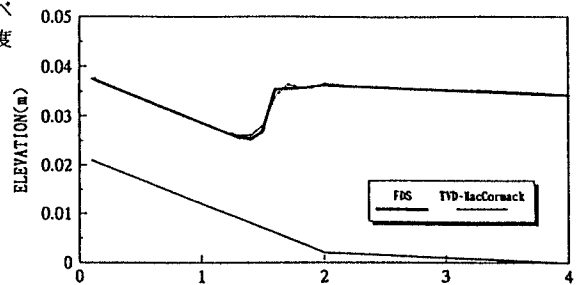


図3a 水面形の再現性

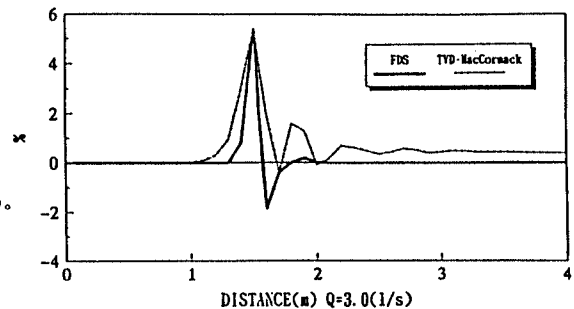


図3b 流量の保存性

上流側勾配 0.01 下流側勾配 0.001 水路幅 0.3m の長方形断面水路における (2) を用いた FDS 法と (3) を用いた TVD-MacCormack 法の数値計算結果の比較