Ⅱ－246

三次元河床擾乱上の有限振幅波の研究

北海道大学工学部　学生員　土井寛史
北海道大学工学部　正　員　森明巨
北海道大学工学部　正　員　板倉忠興

1．はじめに

昭和58年８月の豊平川出水では大波高の三角波が観測された[1]。本研究ではこれらの水面波を理論的に調べるために三次元非定常解析を行った。解析方法は、境界条件の取り扱いを容易にするため水面形に合わせた座標系を用い、摂動展開[2]を行った。

2．基礎方程式

基礎方程式は，運動方程式(x方向、y方向、z方向)、連続式、非回転の条件式(x軸回り、y軸回り、z軸回り）の７本でテンソルで表す（テンソル記号は慣用のものを用いる)。

運動方程式　：　$\dfrac{\partial \rho V^i g_i}{\partial t}-\dfrac{\rho V^i g_i}{\sqrt{g}}\dfrac{\partial\sqrt{g}}{\partial t}+\left[\left\{\rho V^i\left(V^j+w^j\right)-P\delta^{ij}\right\}g_i\right]_{,j}=0$　(1)、(2)、(3)

連続式　：　$\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\rho\sqrt{g}\right)+\left(\rho\sqrt{g}V^i\right)_{;i}=0$　(4)

非回転の条件　：　$V_{i;j}=V_{j;i}$　(5)、(6)、(7)

ここに、$p=\tilde{p}/\rho+gz$、$\tilde{p}$：圧力、ρ：密度、w：座標移動速度。x^iは水面に合わせた座標系で、i=1：流下方向、i=2：横断方向、i=3：鉛直上向き方向、河床を$x^3=0$、水面を$x^3=1$、水路左岸を$x^2=0$、右岸を$x^2=1$にとる。Cartecian座標系y^iとの関係は次式

$$y^1=\lambda x^1,\ y^2=bx^2,\ y^3=hx^3+\eta \tag{8}$$

ここに、h：水深、　λ：y^1方向の特性長、b：水路幅、η：河床高。以下では簡単のために　$x^1=x$、$x^2=y$、$x^3=z$　と書くことにする。Friedrichsの浅水流理論[3]に従いV^1、V^2、V^3、h、b、p、ηを以下のように無次元化する。

$$U=\frac{\lambda}{\sqrt{gd}}V^1、V=\frac{b\lambda}{\sqrt{gd}\,d}V^2、W=\frac{hd}{\sqrt{gd}\,\lambda}V^3、H=\frac{h}{d}、B=\frac{b}{d}、P=\frac{p}{gd}、N=\frac{\eta}{d} \tag{9}$$

d：代表水深。水面と河床と両岸の境界条件は以下のようになる。

W＝0　at　z＝0　and　1、P＝H＋N　at　z＝1、　V＝0　at　y＝0　and　1

H,U,V,W,P,Nを以下のようにσで展開する。

$$H=H_0+\sigma H_1+\sigma^2H_2+\sigma^3H_3+\cdots\cdots、N=\sigma^2N_2 \tag{10}$$

$\sigma=\left(d/\lambda\right)^2$は摂動のパラメータ。射流の場合は、河床波の波高が小さいことから、Nは２次のオーダーとした。以上の展開を基礎方程式に施し、各オーダーごとに解を求める。

3．低次解（０次、１次のオーダー）

連続式をz=1～zで積分し$W(1)=0$を使うと

$$W_{i+1}(z)=-\left[\int_1^z Q_{i,x}\,dz+\frac{1}{\beta}\int_1^z\sum_{j=0}^{i}\left(H_{i-j}V_j\right)_{,y}\right]、\quad Q_i=\sum_{j=0}^{i}H_iU_{i-j} \tag{11}$$

式(11)から右辺がzに依存しない場合には$W_{i+1}=0$となる。この関係を用いると　$W_0=0$、$W_1=0$、$W_2=0$　が得られる。

キーワード：水面形にあった座標系、テンソル、摂動展開
北海道大学工学部土木工学科河川工学講座　〒060　札幌市北区北１３条西８丁目　TEL 011-706-6190

０次のオーダー：０次のオーダーは定常であるとした。(1)~(7)式より次の解になる。

$$U_0=\text{constant}、H_0=\text{constant} \tag{12}$$

１次のオーダー：(1)~(7)式を連立してV_1に関する方程式を求めると、

$$V_{1,xx}-a^2V_{1,yy}=-a^2\frac{\beta^2}{H_0}U_0(H_0+2)V_{1,xt}-a^2\frac{\beta^2}{H_0}(1+H_0)V_{1,tt} \tag{13}$$

$\beta=b/\lambda$、$a^2=1/\beta^2(F-1)$、$F=U_0{}^2/H_0$。

ここで座標(x,t)を$(\tilde{x},\tau)$、$\tilde{x}=x-ct$、$c=\beta a^2U_0(\beta+\beta H_0+1)/2H_0$、$\tau=t$へと変換することによって

$$V_{1,\tilde{x}\tilde{x}}-a^2V_{1,yy}-\xi V_{1,tt}=0、\ \xi=\beta^2a^2(1+H_0)/H_0 \tag{14}$$

が得られξ>0 である。射流(F>1) の場合、a^2>0 であるから、非定常解は非物理的になる。（非定常項）=0 のとき物理的に意味のある解を持ち、水面波は定在波となる。このときの解には射流でよく見られる斜め交錯波も含まれている。また、常流(F<1)ではa^2<0 であり、式(14)は２次元波動方程式となる。以下では射流について述べる。境界条件を満たす解の１つを次の式で表す。

$$V_1=A\sin(\pi y)\cos(\pi ax+\delta) \tag{15}$$

ここで、δ：位相差、A：振幅。U_1、H_1、P_1も同様な形になる。

4．高次近似

２次のオーダー：２次のオーダーが定常であるとすると、(1)~(7)式、１次のオーダーの解より次の式が得られる。

$$\beta^2H_0(1-F)V_{2S,xx}+H_0V_{2S,yy}=\beta U_0N_{2,xy}+\varsigma\exp(i\theta)+\zeta\exp(2i\theta) \tag{16}$$

ここで、ς、ζ：１次変数とβの関数、$\theta=y\pm ax$、添字Ｓは水面における流速を表す。

式(16)の右辺の第２、第３項は、左辺の斉次方程式の解の形になっているから、これらは永年項である。ここで、座標ｘを$x=\hat{x}+\alpha\hat{x}$、$\hat{x}=-H_0{}^2U_0{}^2a^2\pi^2\left(\beta^2a^2+1\right)/6$へと変換することにより、$\exp(2i\theta)$ は消去される。しかし、もう一つの永年項$\exp(i\theta)$は消去できなかった。しかし、実際の物理現象ではこの様な永年項の影響は見られないことより、何らかの方法によって除かれるであろう。一つとして底面における粘性の影響が考えられる。

３次のオーダー：$N_{2,xx}$が現れる。

5．考察

式(16)の右辺には項$N_{2,xy}$があり、３次元的な河床擾乱が２次のオーダーの解に作用し、河床波と水面波の波長が近いとき共振などが起こる可能性を示している。$N_{2,xx}$が３次のオーダーで現れる。２次元的な河床の影響は、小さいと言える。これらの結果は、長谷川等[4)]のリブ(二次元河床形)とステッププール(３次元河床形)に関する考えを支持している。長谷川等は、射流において水面波の影響によって３次元河床波がつくられると考え、これが作られると、更にその河床波と水面波とが干渉し、水面波振幅が非常に大きくなることを実験的に示している。一方で、二次元河床波上の３次元的水面波は速やかに減衰することを示している。

参考文献

1)Akio Mori,Tadaoki Itakura :Interaction Between Hydraulic Jump and Turbulent Boundary Layer ; 8th congress of Asia and Pacific regional division of the international association research,1992.
2) 川原琢治：ソリトンからカオスへ　非線形発展方程式の世界、朝倉書店
3) E.V. Laitone : The second approximation to cnoidal and solitary waves, J. Fluid Mech. , vol. 9, 1961.
4) 長谷川和義：底面起伏を持つ水路における射流の特徴；都市域急流河川の流れと河床変動の数値解析に関するシンポジウム、平成６年