

Philip 式に基づく浸透フラックスの集約化 に関する基礎的検討

東京大学 生産技術研究所 正会員 仲江川 敏* 沖 大幹 虫明 功臣

1. はじめに

既往の研究によれば同一土壌からのサンプリング供試体であっても水分移動に関する土壌パラメータの変動が大きいことが報告されている。分布パラメータを考慮した数値モデルの研究はなされているが、集約化の観点からこうした分布の影響に関する定量的な議論はされていない。そこで本研究では Philip の浸透式を基に、土壌パラメータの分布の影響を定量化し、許容される算定誤差に対する土壌パラメータの分布の範囲を明らかにする。

2. 浸透に対する集約化規範

(1) 浸透速度に対する集約化規範

Richards 式は拡散型の微分方程式であるが、不飽和透水係数がサクシヨンの関数となっているため容易には解くことができない。これまでに数多くの解析解を求める研究が行われてきたが、その先駆的な研究は Philip によって行われた。一般に Philip の式は無級数で表されるが、近似解として式 (1) のように第 3 項までが良く用いられる。

$$f_i(t) = \frac{1}{2} S_i t^{-1/2} + A_i \dots\dots\dots (1)$$

ここで f_i は浸透速度で、 A_i と S_i は Richards 式の解と一致するような式が求められており、

$$A_i = \frac{1}{2} K_s (1 + \theta_i^c) - W \dots\dots\dots (2)$$

$$S_i = 2(1 - \theta_i) \left(\frac{5nK_s\psi_b\phi_i(d, \theta_i)}{3\lambda\pi} \right)^{1/2} = \left\{ 2(1 - \theta_i) \left(\frac{5nK_s\psi_b}{3\pi} \right)^{1/2} \right\} \left(\frac{5nK_s\psi_b\phi_i(d, \theta_i)}{3\lambda\pi} \right)^{1/2} = QP \dots\dots\dots (3)$$

と表される。ここで K_s は飽和透水係数、 W は毛管力フラックスの補正項、 ψ_b は空気侵入圧、 n は空隙率、 λ と c は各々保水特性曲線と不飽和透水係数を Brooks and Corey 式 [1966] で当てはめた時のパラメータを表しており、空隙分布から $c = 2/\lambda + 3$ という関係が導かれる。これら土壌特性を表す関係式はそれぞれ $\psi = \psi_b (\theta/\theta_s)^{-1/\lambda}$ 、 $K = K_s (\theta/\theta_s)^{2/\lambda+3}$ と表される。また式 (3) 中 ϕ_i は無次元化された実効拡散係数で $\phi_i = 3\lambda n \bar{D} / (5K_s\psi_b)$ と定義される。ここで $\bar{D}$ は実効拡散係数である。 ϕ_i は Eagleson の導出したものを Entekhabi がより簡便にして

$$\phi_i(d, \theta_i) = \frac{3\pi}{10(1 - \theta_i)^2} \left\{ \frac{\lambda}{1 + 4\lambda} + \frac{\lambda^2 \theta_i^{(1/\lambda+4)}}{(1 + 4\lambda)(1 + 3\lambda)} - \frac{\lambda \theta_i}{1 + 3\lambda} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

と表している [Bras, 1990]。更に式 (3) の右辺はパラメータ λ を含む項を P 、含まない項を Q と置き換えたものである。

初期土壌水分量は一定で土壌特性だけが分布している時、各特性パラメータを次のように領域平均値と変動項で $\lambda = \bar{\lambda} + \lambda'$ と表し、式 (3) の右辺に現れる P に代入すると、最終的に

$$\bar{f}_i(t) = \frac{1}{2} Q (s_0 + s_2 \bar{\lambda}^2) t^{-1/2} + \frac{1}{2} K_s (1 + \theta_i^c) - W \dots\dots\dots (5)$$

となる。土壌パラメータの面積平均を用いた時の領域平均浸透速度は $Q s_0 t^{-1/2} + \bar{K}_s (1 + \theta_i^c)/2 - W$ で表され、土壌パラメータが分布していることによる浸透速度への影響は $Q s_2 \bar{\lambda}^2 t^{-1/2}/2$ で表される。

今、領域平均浸透速度が土壌パラメータの領域平均で精度良い値を得るには、許容誤差 δf_i よりも、 $Q s_2 \bar{\lambda}^2 t^{-1/2}/2$ が小さければ良いので、 $\delta f_i > Q s_2 \bar{\lambda}^2 t^{-1/2}/2$ を満たせば良い。従って土壌パラメータ λ の分散に対する条件として、

$$\frac{\bar{\lambda}^2}{\lambda'^2} < \frac{2\delta f_i t^{1/2}}{Q s_2} \dots\dots\dots (6)$$

が得られる。この式中 t だけが変数で、 t について解けば $(\bar{\lambda}^2 Q s_2 / 2\delta f_i)^2$ となり、これだけ時間が経過すれば集約が行えることを意味し、経過時間が長ければ長い程、集約化が容易であると言える。

(2) 浸透量に対する集約化規範

以上では現象再現の精度に着目し浸透速度に対する規範を導出したが、水収支の精度に着目し浸透量に対する規範を導出すると

$$\frac{\bar{\lambda}^2}{\lambda'^2} < \frac{\delta I}{Q s_2 t^{1/2}} \dots\dots\dots (7)$$

* 〒106 港区六本木 4-22-1 TEL 03-3402-6231 FAX 03-3402-2597

と表される。浸透速度に対する集約化規範に対する式(6)と上式(7)の違いは右辺の時間 t が分子にきていることで、時間に対する条件としては、浸透速度の場合と異なり $\left(\delta I / (Q s_2 \lambda^{1/2})\right)^2$ の経過時間を越えてしまうと集約化ができなくなってしまう。

(3) 集約化規範の統一

上記の結果は浸透速度と浸透量の集約化を同時に満たすことができるのは $(\lambda^{1/2} Q s_2 / 2 \delta f_i)^2 < t < (\delta I / (\lambda^{1/2} Q s_2))^2$ と限られた時間内だけとなってしまいます。今、両者の許容誤差をそれぞれ飽和透水係数の関数として $\delta f_i = a_f K_s$ 、 $\delta I = a_I K_s t$ と表し、更に初期土壌水分量を $\theta_i = a_i \theta_s$ として両不等式に代入すると(但し $0 \leq a_f, a_I, a_i < 1$)、両者は

$$\lambda^{1/2} < \begin{cases} \frac{a}{\sqrt{5/3\pi s_2}} \sqrt{\frac{K_s}{\theta_s \psi_s}} t^{1/2} & (\text{浸透速度}) \\ \frac{a}{\sqrt{5/3\pi s_2}} \sqrt{\frac{K_s}{\theta_s \psi_s}} t^{1/2} & (\text{浸透量}) \end{cases} \dots\dots\dots (8)$$

となって浸透量の規範の分母が速度の2倍である以外、式形は一致する。この式の導出に当たって $a_f = a_I$ 、 $a = a_I / a_i$ としている。この式から浸透量に対する規範を満たしていれば浸透速度は同時に満たされることになる。

(4) 砂とロームに対する許容分散範囲

以上のように一見全く異なる性質を持つ集約化規範をうまく統一することができたので、式(8)を用いて砂とロームでどの程度の土壌パラメータ λ の分散が許容されるか調べる。図1と図2に初期土壌水分量に対する λ の許容標準偏差を示す。

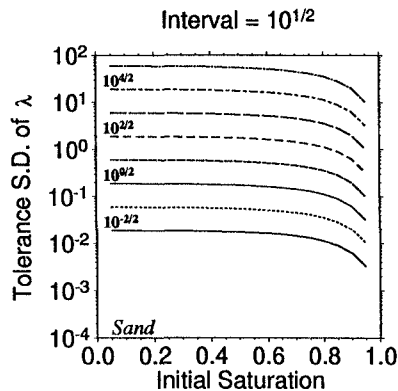


図1 砂の λ に対する許容標準偏差。図中の各曲線はそれぞれ異なる許容誤差に対する曲線を表している。

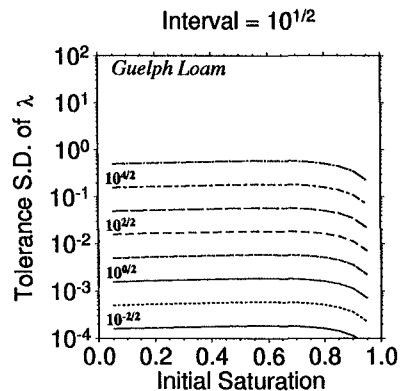


図2 ロームの λ に対する許容標準偏差。図中の各曲線はそれぞれ異なる許容誤差に対する曲線を表している。

図中の各曲線は許容誤差を変えたときの値である。この両図を見ると、飽和付近以外では許容範囲は初期土壌水分量に依存しなく、土壌種類と許容誤差にのみ依って定まると言える。同じ許容誤差に対してロームの許容範囲が狭くなっているのは飽和透水係数が小さいためである。

3. まとめ

本研究では土壌の水分特性に関するパラメータ λ の分布が浸透現象に与える影響を検討した。許容誤差に対する λ の許容分散範囲を導出し更に速度と量の規範を統一して記述する方法を示し、2種の土壌に対して分散の許容範囲を明らかにすることができた。今後は実際の分散値等を用いて実際の土壌での集約化の可能性を検討する必要があるだろう。

References

- Bras, R. L., *Hydrology : An introduction to hydrologic science*, Addison-Wesley Publishing, chapter Flow in Unsaturated Porus Media and Infiltration, 1990.
- Brooks, R. H., and A. T. Corey, Properties of porous media affecting fluid flow, *Journal of the Irrigation and Drainage Division*, 92(IR2), 61-88, 1966.