土木学会第52回年次学術講演会（平成９年９月）

Ⅱ－180　不飽和地下浸透への有限要素法と有限差分法の適用とその比較

芝浦工業大学　正　員　守田　優
芝浦工業大学大学院　学生員　保井久雄

１．はじめに

これまで浸透現象をモデル化する場合、多くは有限差分法が数値計算手法として適用されてきた。この有限差分法については、すでに５種類の方法について比較検討を行った 1)。しかし、対象とする浸透区域の形状を正確に表すには、有限要素法の適用がより有利であると言われている。本研究では、二次元不飽和地下浸透流モデルを有限要素法及び有限差分法を用いて定式化した。そしてこれらのモデルによる数値解を浸透流基礎方程式の解析解と比較することにより、有限要素モデルと有限差分モデルの精度、安定性、計算時間を比較検討した。

２．二次元不飽和地下浸透流の基礎方程式

二次元の不飽和地下浸透の基礎方程式は、Richards の式と等価な次式で表される。

$$\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\alpha_x(\theta)\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\alpha_y(\theta)\frac{\partial H}{\partial y} \qquad \alpha_i(\theta)=\frac{K_{si}K_r}{\partial\theta/\partial P} \qquad (1)$$

ここに、Ｈ：ピエゾ水頭　Ksi：x, z 方向の飽和透水係数　Kr：相対透水係数　Ｐ：毛管圧
θ：体積含水率（θ＝ｎＳ　ｎ：空隙率　Ｓ：飽和度）。ピエゾ水頭Ｈと毛管圧Ｐは、Ｈ＝Ｐ＋Ｚの関係にある。この基礎方程式は熱伝導方程式の形式であることから、熱伝導方程式の数値計算手法が適用できる。本研究では、後述するように、飽和度によらず透水係数を一定とした線形解と、飽和度によって透水係数が変化する線形化解 2) を、数値モデルを検証する解析解として用いた。

３．数値計算手法の検証に用いる解析解及び数値解

不飽和浸透においては、土壌中の浸透プロファイルが検討の対象となる。

有限要素法による計算結果と有限差分ＡＤＥ法による計算結果を解析解と比較するが、二次元の不飽和浸透についての解析解がないため、一次元の浸透に関する Philip の線形解、線形化解を採用した 2)。一次元の不飽和浸透の基礎方程式は式(2)のようになる。ここで、$k=dK/d\theta$ を一定とした場合が線形化解、ｋ＝０の場合が線形解となる。

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=D_*\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}-k\frac{\partial\theta}{\partial z} \qquad (2)$$

Ｄ＊：水分拡散係数、ｋ：体積含水率による透水係数の変化率 $(dK/d\theta)$

また、初期条件ｔ＝０；ｚ＞０，θ＝θ０、境界条件ｔ≧０；ｚ＝０，　θ＝θ１のとき、上式の基礎方程式の解析解は式(3)のように得られる。有限要素法では計算領域を三角形要素に分割し、有限差分法についてはＡＤＥ法を用いた。ここで用いるＡＤＥ(Alternating Direction Explicit)法はBarakat&Clark によって開発された手法を用いた。

$$\theta=\theta_0+\frac{\theta_1-\theta_0}{2}\left[erfc\frac{z-kt}{2(D_*t)^{1/2}}+\exp\left(\frac{kz}{D_*}\right)erfc\frac{z+kt}{2(D_*t)^{1/2}}\right] \qquad (3)$$

表－１　数値解と解析解の比較内容

比　較	対　象	単位時間Δｔ
ケース１	透水係数を一定とした線形解	0.1～10.0sec
ケース２	飽和度によって透水係数を補正した線形化解	0.1～10.0sec
ケース３	実際に近い水分特性曲線を与えた場合	0.1～10.0sec

４．浸透区域及び比較内容

対象とする浸透区域は、深度（地表面からの深さ）ｚ＝50 ㎝までと設定した。有限要素法は三角形要素の切り方により、一定の大きさの要素を用いる<等幅>と要素の大きさを徐々に拡大させる<拡大幅>に分け、接点数、要素数は、それぞれ Np＝485、Ne＝850 及び、Np＝387、Ne＝675 とした。有限差分ＡＤＥ法については

Key Ward 不飽和浸透、有限差分法、有限要素法
〒108 東京都港区芝浦 3-9-14　芝浦工業大学 土木工学科 都市環境工学研究室　℡03-5476-3056

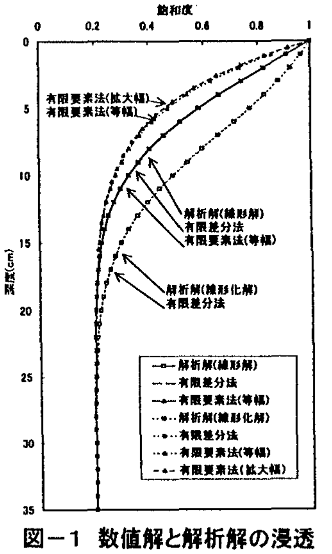
Δｘ＝Δｚ＝１cmとし、全格子数は500とした。また水理定数は、α_l = D*=25mm^2/sec、k=0.5mm/secとした。比較する数値計算手法及び単位時間Δｔは表－１に示した。境界条件は側方を閉鎖条件とし、地表面では飽和度Ｓ＝1.0、初期条件は飽和度Ｓ＝0.2 と与えた。計算の手順としては、求めたピエゾ水頭Ｈから毛管圧Ｐを出し、このＰから飽和度Ｓを算出した。

５．計算結果と考察

浸透開始から100秒後のプロファイルについて比較検討した。

結果の一部を図－１、２に示した。

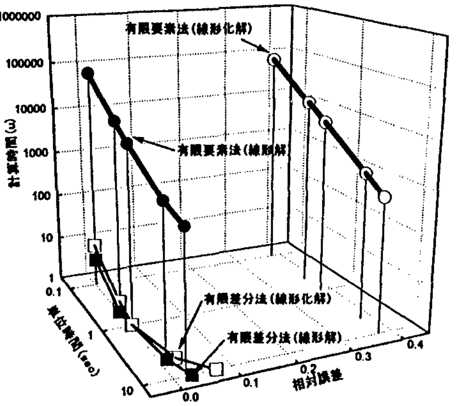
図－１は単位時間Δｔ＝1.0secにおけるケース１(実線)、ケース２(破線)に関する数値解と解析解の浸透プロファイルの比較を示したものである。ケース１では、有限差分ＡＤＥ法、有限要素法、共に解析解と良好な一致を示している。しかし、この解析解は透水係数が一定の線形解であり、不飽和浸透のモデル計算とは言えない。ケース２は、$dK/d\theta = k = const.$という線形化の条件で透水係数が飽和度とともに変化する不飽和浸透の計算である。有限差分ＡＤＥ法と解析解は良好な一致を示しているのに対し、有限要素法は解析解との誤差が大きい。この原因として、有限差分法と異なり有限要素法の計算において、離散化にともなう水理定数の補正を行っていないからであると考える。またこの誤差は有限要素法の＜等幅＞と＜拡大幅＞でほとんど差が見られない。



図－１　数値解と解析解の浸透プロファイルの比較(Δt=1.0sec)

次に、数値計算の単位時間Δｔを変えながら飽和度を計算し、それを解析解と比較することにより計算結果の相対誤差を算出し、精度、安定性、計算時間を比較した。

図－２は各手法の相対誤差と計算時間の比較を３次元のグラフで示したものである。数値計算の手法としては、小さい計算時間、小さい誤差がより優秀な手法ということになるが、この点から見ると有限差分ＡＤＥ法が優れていることがわかる。また有限要素法は線形化解において精度に問題があるものの線形解においては有限差分ＡＤＥ法よりもわずかに精度が良い。しかし有限差分法に比べ約18000倍の計算時間を要する。



図－２　各手法の相対誤差と計算時間の比較

６．まとめ

二次元の不飽和浸透の数値計算手法として有限要素法及び有限差分法のＡＤＥ法を取り上げ、解析解と比較検討した。

(1)不飽和地下浸透のモデルとして、有限差分法が有限要素法に比べ、精度、安定性、計算時間の点において、良好であるという結果が得られた。

(2)有限要素法は形状を表すには有利であり、不飽和浸透の定性的な再現は可能であるが、定量的な検討を行う場合、離散化にともなう水理定数の与え方について何らかの工夫が必要と思われる。

最後に、本論文の計算に協力してくれた学部４年生(当時)の倉田 薫、宮内明子君に謝意を表します。

1)守田 優：３次元不飽和浸透に関する数値解析手法の比較及び考察、水工学論文集第40巻
2)Philip, J.R.,"Theory of Infiltration,"Advances in Hydroscience, V.T.Chow ed., Academic Press, NewYork, 1969