

1. はじめに

平行成層地盤における重複反射理論は観測記録の解析や被害予測など広く用いられている。これは、二・三次元的な地盤情報が少ないことや解析手法の簡便さなどの理由とともに、通常、地震動がほぼ鉛直に入射すると考えてよいこと、これに伴って直下の地盤構造の影響を強く受けるため合理的な手法であると考えられるからであろう。しかしながら、崖地や埋没谷などの近傍の場合、この不整形構造に起因して重複反射理論では説明できない増幅現象が生じることが指摘されており、不整形地盤を対象とした増幅率・入射波動の推定手法も検討する必要がある。このため、本研究では二次元 SH 波動場における境界要素法を用いて増幅率と入射波の推定手法について検討し、基盤と半円形の堆積地盤からなる地盤モデルにおける数値解析例を示した。

2. 境界要素法

図1に示すような二つの弾性体からなる二次元 SH 波動場を考える。このとき振動数領域での方程式として、次式のヘルムホルツ方程式が得られる。

$$\{\nabla^2 + k_{\beta j}^2\} u_j(x, z; \omega) = 0, \quad j = 1, 2 \quad (1)$$

上式の u_j は第 j 媒質での変位, $k_{\beta j}$ は S 波の波数 $k_{\beta j} = \omega / \beta_j$, また, β_j は S 波速度を表す。

式(1)に境界要素法を用いると、2つの領域それぞれに対して、振動数ごとの線形一次方程式が得られる¹⁾。

$$\mathbf{H}_1 \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1^F & \mathbf{u}_1^I \end{Bmatrix}^T - \mathbf{G}_1 \begin{Bmatrix} 0 & \mathbf{T}_1 \end{Bmatrix}^T = \mathbf{v}, \quad \mathbf{H}_2 \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_2^F & \mathbf{u}_2^I \end{Bmatrix}^T - \mathbf{G}_2 \begin{Bmatrix} 0 & \mathbf{T}_2 \end{Bmatrix}^T = 0 \quad (2)$$

式(2)で、 $\mathbf{u}_j^F$, $\mathbf{u}_j^I$ はそれぞれ第 j 媒質の自由表面節点、二媒質間の境界節点での変位ベクトル, $\mathbf{T}_j$ は二媒質間の境界における応力ベクトルである。また、 $\mathbf{v}$ は入射波動による節点変位ベクトルである。

媒質間の境界節点の変位と応力の連続条件 $\mathbf{u}_1^I = \mathbf{u}_2^I \equiv \mathbf{u}^I$, $\mathbf{T}_1 = -\mathbf{T}_2 \equiv \mathbf{T}^I$ を用いて式(2)を連立すると次式が得られる。

$$\mathbf{A} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1^F & \mathbf{u}_1^I & \mathbf{u}_2^F & \mathbf{T}^I \end{Bmatrix}^T = \begin{Bmatrix} \mathbf{v}^F & \mathbf{v}^I & 0 & 0 \end{Bmatrix}^T \quad (3)$$

3. 観測値の満たすべき方程式

入射波を与えて各節点の変位を求める場合、式(3)を連立方程式として解くのが普通であるが、本研究では地表面の応答から入射波を推定することを目的とするため $\mathbf{A}$ の逆行列を求めた。さらに観測波形の得られている節点に関する部分だけ取り出し、振動数 m ($m=1, \dots, M$) ごとに第 k 番目の観測点でのフーリエ成分 U_k^m ($k=1, \dots, K$) に対して、次の K 個の方程式を用いた。

$$U_k^m = \{p_{k1}^m, \dots, p_{kn}^m, \dots, p_{kN}^m\} \{v_1^m, \dots, v_n^m, \dots, v_N^m\}^T \equiv \mathbf{p}_k^m \mathbf{v}^m \quad (4)$$

ここで、入射波動 $\mathbf{v}^m$ は入射波動の加わるすべての節点に関して番号を付けて構成した列ベクトルである。また、 $\mathbf{p}_k^m = \{p_{k1}^m, \dots, p_{kn}^m, \dots, p_{kN}^m\}$ は $\mathbf{A}^{-1}$ の観測点 k に対する行の要素から、入射波 v_n^m の掛かるものだけを抜き出した行ベクトルであり、要素の p_{kn}^m は節点 n に入射した波動が節点 k に及ぼす影響、すなわち不整形地盤における一般化された増幅率と考えることができる。さらに、 K 個の観測点で M 個の振動数成分 U_k^m が得られているとき、振動数ごとに式(4)をまとめれば、第 m 振動数に対して次式を得る。

$$\mathbf{U}^m = \mathbf{P}^m \mathbf{v}^m \quad (5)$$

4. 入射波動の推定

式(5)中の $\mathbf{P}^m$ は $K \times N$ 行列であるが、多数の点で観測記録が得られることはなく、未知数の方がはるかに多い ($K \ll N$)。このため、一つの入射平面波で入射波が表されるものとした。

図1のように角度 θ で入射する平面波による点 n での入射波変位は、

$$v_n^m = f_m \exp(ikx_n + i\gamma z_n), \quad k = k_{\beta 2} \sin \theta, \quad \gamma = k_{\beta 2} \cos \theta, \quad i \text{ は虚数単位} \quad (6)$$

と表される。ここで、 x_n , z_n は入射波動の加わる節点の座標, f_m は入射波動の時間関数の第 m 番目の振動数成分である。式(6)を式(5)に代入すると、一つの平面波で近似した観測点変位 $\hat{\mathbf{U}}^m$ は次式で表される。

$$\tilde{U}^m = f_m P^m e^m(\theta), e^m(\theta) = \{\exp(ikx_1 + i\gamma z_1), \dots, \exp(ikx_n + i\gamma z_n), \dots, \exp(ikx_N + i\gamma z_N)\}^T \quad (7)$$

入射角 θ は $\exp(\cdot)$ に含まれるので、線形演算では最適解が求められない。このため、複数の入射角に対してそれぞれ時間関数を最小二乗法で求め、次式で示される残差 $\varepsilon(\theta)$ が最も小さくなった入射角と時間関数の組み合わせを最適解とした。

$$\varepsilon(\theta) = \sum_{m=1}^M \varepsilon_m(\theta), \quad \varepsilon_m(\theta) = \min_{f_m} |U^m - \tilde{U}^m|^2 = \min_{f_m} |U^m - f_m P^m e^m(\theta)|^2 \quad (8)$$

5. 数値計算例

図1に示すような半円形の堆積地盤を用いて数値計算を行った。まず、1つの平面波だけを与えて求めた波形を用いて上記の入射波の推定を行い、厳密に推定できることを確認した。次に、5つの Ricker Wavelet の平面波を加えて自由表面の応答を求めた（図2中の一点鎖線）。計算に用いた入射波に関する定数は表の通りである。この後、求めた地表面の応答から3節点分を観測波として取り出し入射波の推定を行った。応答波形を取り出した節点の座標は図1に示す3点で、このうち2点が堆積盆地上の節点である（用いた変位波形は図2中の太線で示している）。

図3は入射角 θ と残差 $\varepsilon(\theta)$ の関係を示したもので、最も強い入射波の入射角 $\theta=0^\circ$ が検出されている。また、図4は入射角 $\theta=0^\circ$ に対して求められた入射波の時間関数の最適解である。これらの入射角と時間関数を与えて応答変位を再度求めた結果が図2の実線である。入射角が 0° であるため、原点を中心として対称になっており、入射波の推定に使った節点から離れた点での波形は再現できていないものの、観測点に近い堆積盆地上の点ではもとの波形がよく再現されている。

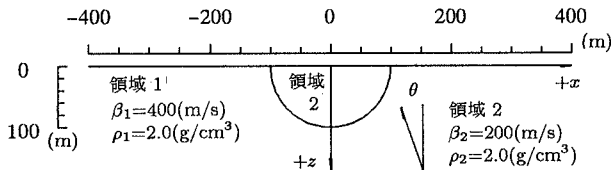


図1 数値計算に用いた地盤モデル。

表 用いた入射波 (Ricker Wavelet $F(\omega)$) に関する定数

$$F(\omega) = a \exp(-i\omega\tau) \left\{ -\frac{\omega^2}{2\pi^{5/2}f_c^3} \exp\left(-\frac{\omega^2}{4\pi^2f_c^2}\right) \right\}$$

No.	入射角 [度]	振幅 a	特性振動数 f_c [Hz]	時間遅れ τ [秒]
1	-20	0.0625	1.0	4.0
2	-10	0.25	1.0	4.5
3	0	0.375	1.0	5.0
4	10	0.25	1.0	5.5
5	20	0.0625	1.0	6.0

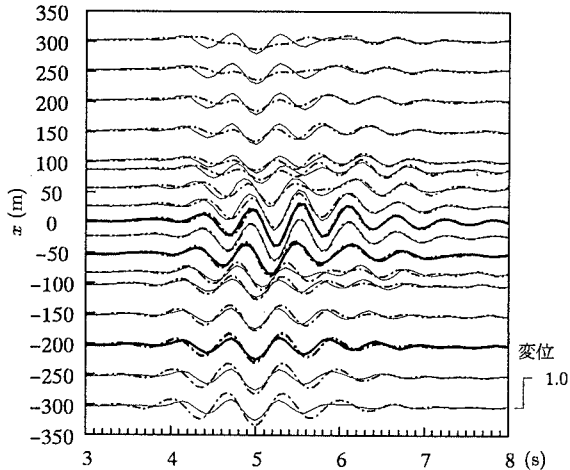


図2 5つの Ricker Wavelet を入射して求めた変位（一点鎖線）と推定した入射波から求めた変位波形（実線）。太線は観測波形として用いた波形を示す。

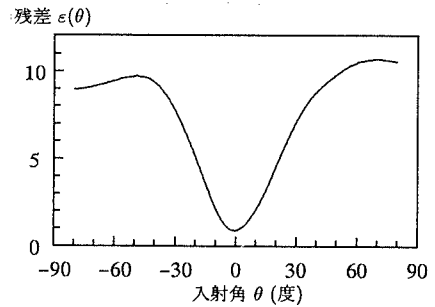


図3 入射角ごとの残差 $\varepsilon(\theta)$ 。

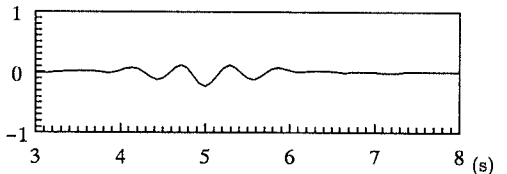


図4 推定した入射角 $\theta=0^\circ$ に対する入射波の時間関数。

6. まとめ

- 1) 不整形地盤における入射波の推定方法を示し、これに基づいて簡単な地盤モデルでの数値解析例を示した。
- 2) 数値解析例では、一つの平面波を用いて堆積地盤上の節点における波形をほぼ再現することができた。

文献

- 1) 田中正隆・他 (1991), 計算力学と CAE シリーズ 2 境界要素法, 培風館。