

北海道大学工学部 正 員 林川 俊郎
清水建設株式会社 正 員 武村 信也
北海道大学工学部 正 員 佐藤 浩一

1. まえがき

構造物の動的応答は、構造物に作用する外力の性質と、構造物自身の固有振動性状に依るところが大きい。そのため、構造物の動的応答を調べるためには、固有振動数ならびに固有振動モードを精度良く求めることが重要である。一般に構造物の固有振動解析では、部材要素を2軸対称断面としてモデル化するため、要素断面の図心とせん断中心は同一となり、曲げ振動とねじり振動の連成は生じない。しかし、実際の橋梁構造物では薄肉断面が用いられることが多く、2軸非対称断面ではその図心とせん断中心が異なることに伴い、曲げ振動とねじり振動が連成する。また、薄肉断面桁の固有振動解析では、一般的に変断面部材をいくつかの直線部材に分割して重ね合わせる方法が用いられるが、隣り合う要素間で部材の図心軸あるいはせん断中心軸が不連続になる場合があり、各要素の剛性マトリックスおよび質量マトリックスを単純に重ね合わせることができない。こういった薄肉変断面部材は、要素両端面上の任意の点に関する剛性マトリックスおよび質量マトリックスを用意することによって、隣接要素間における共通の節点を解析点に選ぶことにより、振動解析が可能となる。

そこで本研究では、薄肉断面部材の一般化された剛性マトリックスと質量マトリックスを誘導し、曲げ振動とねじり振動が連成する変断面桁の立体固有振動解析を行い、得られた固有振動数の精度およびその振動特性について考察するものである。

2. 立体薄肉変断面部材のモデル化

図-1に示すような薄肉断面部材において、断面のせん断中心 $S(y_s, z_s)$ における変位は、断面不変の仮定より導かれたはりの変位関数を用いて断面上の任意の点 $P(y_p, z_p)$ の変位で表示すると、以下ようになる。

$$\left. \begin{aligned} u_s(x) &= u_p(x) + y_p \cdot v'_p(x) + z_p \cdot w'_p(x) - \theta'(x) \cdot \omega_n(y_p, z_p) \\ v_s(x) &= v_p(x) + (z_p - z_s) \cdot \theta(x) \\ w_s(x) &= w_p(x) - (y_p - y_s) \cdot \theta(x) \\ v'_s(x) &= v'_p(x) + (z_p - z_s) \cdot \theta'(x) \\ w'_s(x) &= w'_p(x) - (y_p - y_s) \cdot \theta'(x) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

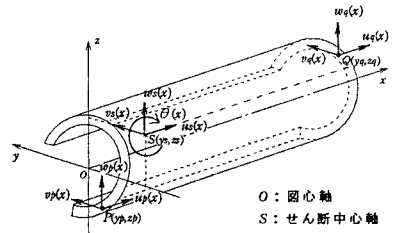


図-1 薄肉断面部材

ここで $u_p(x), v_p(x), w_p(x)$ は点 P での x, y, z 軸方向変位、 $u_s(x), v_s(x), w_s(x)$ はせん断中心での x, y, z 軸方向変位、 $\theta(x)$ は x 軸まわりの回転角、 $\omega_n(y_p, z_p)$ は規準化されたサンプソンのゆがみ関数、 $(\cdot)' = d/dx$ である。要素左端の任意点を $P(y_p, z_p)$ 、右端の任意点を $Q(y_q, z_q)$ とする。点 Q についても式(1)と同様の関係式を導くことができ、要素両端面上のせん断中心の変位は、次のようにマトリックス表示することができる。

$$\begin{Bmatrix} d_{sL} \\ d_{sR} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [T_p] & 0 \\ 0 & [T_q] \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d_p \\ d_q \end{Bmatrix} \quad (2)$$

ここで、 $\{d_{sL}\}^T = \{u_{sL}, v_{sL}, w_{sL}, \theta_{sL}, \theta_{sL}, \theta_{sL}, \theta_{sL}\}$ 、 $\{d_{sR}\}^T = \{u_{sR}, v_{sR}, w_{sR}, \theta_{sR}, \theta_{sR}, \theta_{sR}, \theta_{sR}\}$

$$\{d_p\}^T = \{u_p, v_p, w_p, \theta_p, \theta_p, \theta_p, \theta_p\}$$

$$\{d_q\}^T = \{u_q, v_q, w_q, \theta_q, \theta_q, \theta_q, \theta_q\}$$

$$[T_p] = \begin{bmatrix} 1 & & & z_p & y_p & -\omega_n(y_p, z_p) \\ & 1 & & z_p - z_s & & \\ & & 1 & -(y_p - y_s) & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & -(y_p - y_s) \\ & & & & & 1 \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad [T_q] = \begin{bmatrix} 1 & & & z_q & y_q & -\omega_n(y_q, z_q) \\ & 1 & & z_q - z_s & & \\ & & 1 & -(y_q - y_s) & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & -(y_q - y_s) \\ & & & & & 1 \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Keywords : 薄肉断面、連成振動、モード連成比

〒060 札幌市北区北 13 条西 8 丁目 北海道大学工学部土木工学科 Tel. (011)706-6172 Fax. (011)726-2296

であり、 θ_y 、 θ_z 、 θ_w はそれぞれy軸まわりの回転角、z軸まわりの回転角、およびねじり率を表している。次に、式(2)を $\{d_s\} = [T]\{d_{pq}\}$ と表せば、変換マトリックス $[T]$ を用いてせん断中心位置における要素剛性マトリックス $[K_s]$ を、次式のように断面上の任意点における剛性マトリックス $[K_{pq}]$ に変換することができる。

$$[K_{pq}] = [T]^T [K_s] [T] \quad (4)$$

質量マトリックスについても同様の方法により任意点における要素質量マトリックスを導くことができる。

$$[M_{pq}] = [T]^T [M_s] [T] \quad (5)$$

本研究では、変断面部材により構成された構造物を直線要素の集合体にモデル化して固有振動解析を行うことにする。隣接する要素間でのせん断中心が異なる場合、各要素の剛性マトリックスや質量マトリックスをそのまま重ね合わせることができない。そこで、式(4)と式(5)を用いて要素境界面上で同一の解析点に関する剛性マトリックスと質量マトリックスを計算しておけば、構造物全体について重ね合わせを行うことができる。

3. 数値計算結果

数値計算に用いた断面形状を図-2 に、その断面諸元を表-1 に示す。図-3 には桁高が2次放物線的に変化する直線変断面桁を示す。支間中央点での桁高は端部の桁高の半分とし、支間長は31.5m、境界条件は鉛直および水平曲げ変形には単純支持、ねじり変形には固定、そりねじり変形には自由、軸変形には固定とした。計算にあたっては変断面桁を10分割し、直線要素の集合体にモデル化した。以下の数値計算例では、離散座標系の手法である集中質量法と整合質量法、分布座標系の手法である連続質量法の3通りの方法で解析を行った。表-2 に10次までの固有振動数と、連続質量法に対する比を、表-3 にモード連成比を示す。ここでモード連成比とは、各振動の連成状態を判定するために、1節点7自由度を有する固有振動モード中でそれぞれの変位が全体に占める割合を数値的に表すパラメーターであり、i 次モードの x 軸方向変位のモード連成比は次式で表される。

$$\phi_i = \frac{\sum_{j=1}^N \sqrt{u_{ij}^2}}{\sum_{j=1}^N (\sqrt{u_{ij}^2} + \sqrt{v_{ij}^2} + \sqrt{w_{ij}^2} + \sqrt{\alpha_{ij}^2} + \sqrt{\beta_{ij}^2} + \sqrt{\gamma_{ij}^2} + \sqrt{\theta_{ij}^2})} \times 100(\%)$$

ここでNは全節点数である。また表-3 には最も支配的であると思われる振動モードを影線で示し、Vは鉛直振動、Hは水平振動、Tはねじり振動を表している。一般に図心とせん断中心の偏心量を考慮しない場合には、集中質量法では連続質量法より小さい固有振動数が、整合質量法では大きい固有振動数が得られることが知られている。偏心量を考慮した場合には、表-2 に示すように、整合質量法により求められた固有振動数が連続質量法による固有振動数よりも小さくなる場合がある。これらのモードは、表-3 のモード連成比から判断するとねじり振動の卓越したモードであり、曲げ振動とも連成していることがわかる。

4. あとがき

本研究では、非対称薄肉断面を有する変断面直線桁における三重連成振動の固有値解析を行った。図心とせん断中心との偏心量を考慮した場合、ねじり振動の卓越したモードでは連成の効果により、整合質量法で計算された固有振動数が連続質量法によるものよりも小さくなる傾向が見られた。連成振動の中で支配的な固有振動モードを判定するために、モード連成比を提案し、その連成の割合を明らかにした。また、ねじり振動が卓越する場合や高次モードになるにつれて複雑な連成状態になることを確認した。

【参考文献】1) 川井忠彦：座屈問題解析、培風館、1974年 2) 藤谷義信：薄肉はり構造解析、培風館、1990年

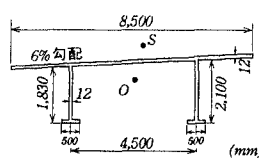


図-2 断面形状

表-1 断面諸元

A (m ²)	1.613 × 10 ⁻¹
I _y (m ⁴)	7.914 × 10 ⁻²
I _z (m ⁴)	9.146 × 10 ⁻¹
K (m ⁴)	7.744 × 10 ⁻⁶
O _w (m ⁶)	3.986 × 10 ⁻¹
w (t/m)	1.268 × 10 ⁰

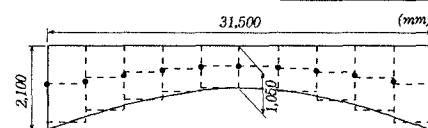


図-3 変断面桁

表-2 固有振動数一覧 (Hz)

Mode order	Lumped MassMethod	Consistent MassMethod	Continuous MassMethod
1 T1	2.758 (-2.507)	2.772 (-2.007)	2.829
2 V1	4.177 (-0.364)	4.193 (0.093)	4.192
3 T2	12.170 (-4.376)	12.388 (-2.662)	12.727
4 V2	13.599 (-1.647)	13.830 (0.023)	13.827
5 H1	19.318 (-1.188)	19.409 (-0.702)	19.546
6 T3	27.668 (-8.017)	28.758 (-2.314)	29.439
7 V3	31.611 (-3.694)	32.842 (0.057)	32.823
8 T4	47.768 (-9.127)	51.120 (-2.750)	52.566
9 V4	52.574 (-5.889)	55.953 (0.159)	55.864
10 H2	76.526 (-1.587)	77.864 (0.133)	77.760

Note: () = (f - f') / f' × 100

表-3 モード連成比一覧 (%)

Mode order	φ _x	φ _y	φ _z	φ _{θx}	φ _{θy}	φ _{θz}	φ _{θw}	Total
1 T1	0.0	16.8	32.0	43.7	0.3	2.4	4.8	100
2 V1	0.0	1.8	83.0	5.5	8.8	0.3	0.6	100
3 T2	2.7	20.6	11.7	46.2	3.8	5.0	10.0	100
4 V2	7.9	0.5	75.2	1.1	15.1	0.1	0.2	100
5 H1	0.1	85.3	1.3	2.7	0.2	9.5	0.9	100
6 T3	1.5	19.1	16.9	40.3	3.0	6.2	13.0	100
7 V3	6.5	0.4	70.2	0.9	21.5	0.1	0.3	100
8 T4	7.1	19.4	7.4	35.9	6.7	8.2	15.4	100
9 V4	18.8	0.8	55.6	1.7	22.2	0.3	0.7	100
10 H2	6.3	71.3	1.8	2.6	1.5	15.6	1.1	100