

1. はじめに

著者らは、これまでに偏平アーチの1自由度系の解析を行ってきたが¹⁾、偏平アーチは連続体であるから、多自由度系としての解析が必要である。そこで本研究では、偏平アーチを2自由度系近似し、1次対称振動近傍の分岐振動に及ぼす3次対称振動の影響を明らかにする。また、2次逆対称振動が引き金となって生じる動座屈現象²⁾に注目し、その動的挙動に関する基礎的な特性について検討する。

2. 2自由度系としての解法

図-1に示すような偏平アーチが、ライズの形状関数 $\bar{x} = \sin \pi \xi$ をもつ場合の対称振動を考える。系を1次対称振動と3次対称振動の2自由度系と仮定し、線形減衰力を考慮すれば、時間に関する非線形運動方程式は次式となる¹⁾。

$$\ddot{T}_1 + 2h_1 \alpha_1 \dot{T}_1 + \left(1 + \frac{1}{2} \Delta^2\right) T_1 + \frac{3}{4} \Delta T_1^2 + \frac{9}{4} \Delta T_1^3 + \frac{9}{4} T_1 T_3^2 + \frac{1}{4} T_1^3 = \frac{4}{\pi} p \cos \omega \tau \quad (1)$$

$$\ddot{T}_3 + 18h_3 \dot{T}_3 + 81T_3 + \frac{9}{2} \Delta T_1 T_3 + \frac{9}{4} T_1^2 T_3 + \frac{81}{4} T_3^3 = -\frac{4}{3\pi} p \cos \omega \tau \quad (2)$$

ここに、 T_1, T_3 : 1次および3次振動の時間関数、 h_1, h_3 : 減衰定数、 $\alpha_1 = \sqrt{1 + \Delta^2/2}$ 、 $\Delta = \Delta_0/r$ 、 Δ_0 : ライズ、 $p = p_0 \ell^4 / EIr$ 、 p_0 : 荷重強度、 ℓ : スパン長、 E : ヤング率、 I : 断面2次モーメント、 r : 回転半径、 $\omega = \Omega / \omega_1$ 、 Ω : 荷重の円振動数、 ω_1 : ライズがないはりの線形1次固有円振動数、 $\tau = \omega_1 t$ 、 t : 時間。

式(1)および式(2)の解を本研究では次式のように仮定する。

$$T_1 = c_{10} + c_{11/2} \cos \frac{\omega \tau}{2} + s_{11/2} \sin \frac{\omega \tau}{2} + c_{11} \cos \omega \tau + s_{11} \sin \omega \tau + c_{12} \cos 2\omega \tau + s_{12} \sin 2\omega \tau \quad (3)$$

$$T_3 = c_{30} + c_{31} \cos \omega \tau + s_{31} \sin \omega \tau + c_{32} \cos 2\omega \tau + s_{32} \sin 2\omega \tau \quad (4)$$

ここに、 $c_{10}, c_{11/2}, s_{11/2}, c_{11}, s_{11}, c_{12}, s_{12}$: 1次振動の振幅成分、 $c_{30}, c_{31}, s_{31}, c_{32}, s_{32}$: 3次振動の振幅成分。

式(3),(4)を式(1),(2)に代入して、調和バランス法を適用すれば連立非線形代数方程式が得られる。これに、Newton-Raphson 法を用いて解けば、定常振動の振幅成分が得られる。また、式(1),(2)を4元連立の1階常微分方程式に変換し、Runge-Kutta-Gill 法を適用すれば、時間応答が得られる。

3. 2自由度系の数値結果

図-2,3は、ライズ比 $\Delta = 3.0$ 、減衰定数 $h_1 = h_3 = 0.05$ の場合の無次元加振円振動数 ω と応答振幅 $A_1, A_{1/2}$ との関係を示す。これらの図には、Runge-Kutta-Gill 法による応答振幅をプロットしている。図中の○はシミュレーションによる周期 $T (= 2\pi / \omega)$ (加振振動数の周期)の最大応答、□は周期 $2T$ (加振振動数の周期の2倍)の最大応答、△は周期 nT ($n \geq 3$, 加振振動数の周期の n 倍)の最大応答、×はカオスの発生時の時系列応答波形の最大応答を示す。1, 2自由度系の結果は、1次振動の主調波共振 A_1 および 1/2 分数調波共振 $A_{1/2}$ ともにライズの影響を受け、振幅の大きさによって、軟化・硬化パネの両特性を示す。解析解とシミュレーションによる数値解の周期解はほぼ一致する。また、1次振動の 1/2 分数調波共振近傍にカオスが存在する。2自由度系に

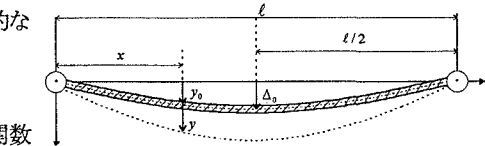


図-1 偏平アーチの一般図

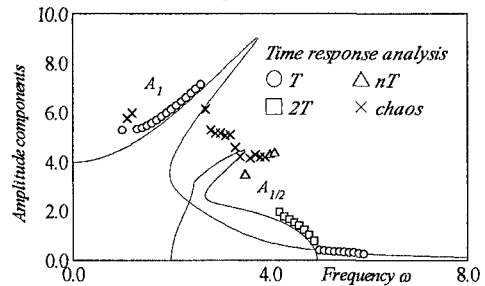


図-2 応答曲線

($\Delta = 3.0, h_1 = 0.05, p_1 = 612.0$ (1自由度系))

キーワード : 偏平アーチ, カオス, 動座屈

連絡先 : 〒852 長崎市文教町1-14 長崎大学工学部社会開発工学科 TEL/FAX 0958-48-9639

ついて、3次振動の2倍の高調波共振は、1次振動の運動方程式に T_2 の2乗の項がないため、1/2分数調波共振近傍に及ぼす影響は小さい。1次振動の1/2分数調波共振近傍のカオスに注目すると、時系列の最大応答について2自由度系の解が1自由度系の解よりもわずかに大きい。カオスが発生する振動数領域はほぼ一致する。図-4は、図-2,3でカオスが頻繁に発生している無次元加振円振動数 $\omega = 3.8$ のPoincaré写像を1自由度系と2自由度系の結果について示す。1自由度系と2自由度系の結果はともにカオスを示し、ストレンジアトラクターは類似している。すなわち、1次振動の1/2分数調波共振近傍のカオス解析について1自由度系としての取り扱いで十分である。

4. 偏平アーチの動座屈

ライズ Δ_0 がマイナス方向の偏平アーチの場合を対象とする。系を1次対称振動と2次逆対称振動の2自由度系と仮定し、線形減衰力を考慮すれば、時間に関する非線形運動方程式は次式となる¹⁾。

$$\ddot{T}_1 + 2h_1\alpha_1\dot{T}_1 + \alpha_1^2T_1 + \frac{3}{4}\Delta T_1^3 + \Delta T_2^2 + T_1T_2^2 + \frac{1}{4}T_1^3 = \frac{4}{\pi}p\cos\omega\tau = p_1\cos\omega\tau \quad (5)$$

$$\ddot{T}_2 + 8h_2\dot{T}_2 + 16T_2 + 2\Delta T_1T_2 + T_1^2T_2 + 4T_2^3 = 0 \quad (6)$$

ここに、 $T_1, T_2 : 1$ 、2次振動の時間関数、 $h_1, h_2 : 1$ 、2次振動の減衰定数。

主に、Runge-Kutta-Gill法を用いた時間応答解析を行う。

図-5に、偏平アーチに周期的変動荷重が作用した場合のライズ比 $\Delta = -7.0$ 、減衰定数 $h_1 = h_2 = 0.005$ の場合の無次元加振円振動数 ω と動的荷重強度 p_1 との関係を示す。図中の・は動座屈が生じない場合を、○は分岐型動座屈を、×は屈服型動座屈が生じる場合を示している²⁾。線形固有振動数の80~90%の加振振動数で動座屈に至る荷重が最も低く、その前後の加振振動数領域で動座屈が生じやすい傾向がある。また、2倍の高調波共振と1/2分数調波共振領域において、荷重が増加すると動座屈が生じる。荷重が十分に大きい場合は、2倍の高調波共振、線形固有振動数および1/2分数調波共振の動座屈領域が重なって動座屈が生じる領域は広くなる。

5. まとめ

本研究で得られた結果は次のようになる。

- (1) 1次振動の1/2分数調波共振近傍のカオス解析については、1自由度系の解析で妥当である。
- (2) 動座屈は線形固有振動数近傍で生じやすく、荷重が増加すれば2倍の高調波共振および1/2分数調波共振において発生する。

参考文献

- 1) 高橋和雄, 太田晶一: 偏平アーチの非線形振動とカオス解析, 構造工学論文集, Vol.42A, pp.55~61, 1996.3.
- 2) 村田 賢, 安江 博: 周期外乱を受ける偏平アーチの動座屈, 日本建築学会構造系論文集, 第469号, pp.71~80, 1995.3.

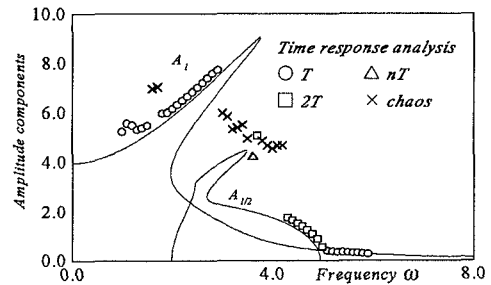
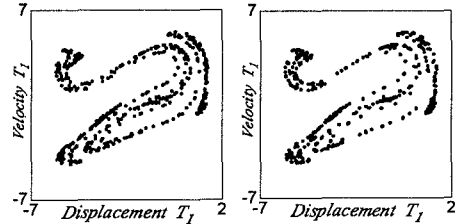


図-3 応答曲線

($\Delta = 3.0, h_1 = h_2 = 0.05, p_1 = 612.0$ (2自由度系))



(a) 1自由度系

(b) 2自由度系

図-4 Poincaré写像

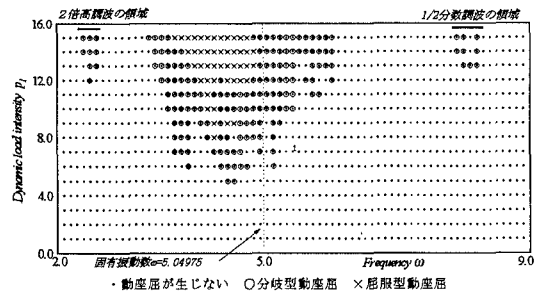


図-5 加振振動数と荷重の関係($\Delta = -7.0, h = 0.005$)