

I - B20

有限要素法によるチャンネル乱流の LES

中央大学 学生員 佐々木 範也

中央大学 正員 川原 睦人

1 はじめに

流体現象のほとんどは乱流であり、数値流体力学の目的のかなりの部分が乱流運動の理解と、その利用に関係していると言える。しかし、現代の数値流体力学手法をもってしても、乱流はまだ解明困難な流れであることも事実である。現在の計算機的能力で乱流を解析するためには、乱流モデルを導入する必要がある。

スマゴリンスキーモデルに基づく LES モデルは簡潔で効果的な方法として広く適用されているが、いくつかの欠点も指摘されている。単純な流れ場であるチャンネル乱流での LES 解析においても、流れ場によってスマゴリンスキー一定数 C_s が変化する、壁面付近での減衰関数の導入が必要になることが知られている。本研究では、これらの問題点を改善する方法として状態量 (DNS データ) の観測値を利用して C_s の値を決めるパラメータ同定を行うものとする。また、同定した C_s を用いて、複雑な形状をよする流れ場においても比較的容易に適用できる有限要素法を用いた LES 解析を行うものとする。

2 基礎方程式

Navier-Stokes 方程式をフィルタリングして SGS のレイノルズ応力にスマゴリンスキーモデルを用いた場合の基礎方程式は以下のように表される。

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right\} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2)$$

ここで、 $\bar{u}_i$ は i 方向の grid-scal の速度、 $\bar{p}$ は乱流圧力を含む圧力を表している。また ρ は密度、 ν は動粘性係数である。Leonard 項 L_{ij} + Cross 項 C_{ij} はゼロとし、SGS 乱流粘性係数 ν_t は次式で与えられる。

$$\nu_t = (C_s \Delta)^2 \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)^2 \right\}^{1/2} \quad (3)$$

ここで、フィルター幅 Δ は有限要素体積 V を用いて $\Delta = V^{1/3}$ のように定義される。 C_s はスマゴリンスキー一定数と呼ばれている。また壁付近での急激な速度変化による過大な乱流粘性係数の生成をおさえるために、次式で表される Van-Driest 型減衰関数 $f = 1.0 - \exp(-y^+/25)$ をフィルター幅 Δ に乗じる。ここに、 $y^+ (= u_\tau y / \nu)$ は極座標、 y は壁からの距離、 u_τ は壁面摩擦速度を表している。

キーワード : 有限要素法、掘削、パラメータ同定

中央大学大学院理工学研究科 (〒 112 東京都文京区春日 1-13-27, TEL 03-3817-1814, FAX 03-3817-1803)

3 有限要素法による離散化

運動方程式と連続式に流速場と圧力場を分離することができる分離型解法を適用した後、重み付き残差法を適用し、ガラーキン法の手順で定式化を行えば、次のような有限要素方程式が得られる。また、時間方向の離散化には、BTD (Balancing Tensor Diffusivity) 法を用いクラック・ニコルソン法を粘性項に対し適用した。

$$Ap^{n+1} = -D_i u_i^n \quad (4)$$

$$\{M \delta_{ij} + \frac{\Delta t}{2} S_{ij}\} u_i^{n+1} = M u_i^n - \Delta t \{K u_i^n + \frac{1}{2} S_{ij} u_j^n + G_i p^{n+1}\} \quad (5)$$

ここで、式 (4)(5) の有限要素方程式は前処理つき共役勾配法を用いて解かれている。

以下に、各係数行列を示す。

$$M = \int \Phi_\alpha \Phi_\beta dV, \quad A = \int \Phi_{\alpha,i} \Phi_{\beta,i} dV$$

$$S_{ij} = \frac{\Delta t}{2} \int u_{ej}^n u_{ek}^n \Phi_{\alpha,j} \Phi_{\beta,k} dV \delta_{ij} + \int (\nu + \nu_t) \Phi_{\alpha,i} \Phi_{\beta,j} dV$$

$$K = \int u_{ei}^n \Phi_\alpha \Phi_{\beta,i} dV, \quad G_i = \int \Phi_\alpha \Phi_{\beta,i} dV$$

$$D_i = \int \frac{1}{\Delta t} \Phi_\alpha \Phi_{\beta,i} dV + \int u_{ej}^n \Phi_{\alpha,i} \Phi_{\beta,j} dV$$

4 パラメータ同定

パラメータ同定は、次式に示されるような評価関数を最小にするパラメータを見つけるものとして定義される。

$$J = \frac{1}{2} (\bar{u}_i - \bar{u}_i^*)^T (\bar{u}_i - \bar{u}_i^*) \quad (6)$$

ここで、 $\bar{u}_i$ 、 $\bar{u}_i^*$ はそれぞれ平均速度の計算値と観測値 (DNS データ) を示す。また、本研究では、評価関数を最小にするパラメータを見つける最小化の計算を準ニュートン法により行う。評価関数のスマゴリンスキー一定数 C_s に対する勾配を計算するため、(6) 式を C_s で微分すると次式のようなになる。

$$\{d\} = - \left[\frac{\partial J}{\partial C_s} \right] = - \left[\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial C_s} \right] (\bar{u}_i - \bar{u}_i^*) \quad (7)$$

ここで、 $[\frac{\partial u}{\partial x}]$ は感度行列であり感度方程式を解くことによって求められる。有限要素方程式 (4)(5) を C_s で微分して感度行列に関する方程式を導き出す感度方程式法を適用する。

5 計算条件

主流方向を X、壁垂直方向を Y、スパン方向を Z とする。計算領域はチャンネル幅 H に対して主流方向に 3.2H、スパン方向に 1.6H とし、用いた格子は領域を X 方向に 32、Y 方向に 48、Z 方向に 32 分割としている。また Y 方向に対しては壁近傍に寄せた不等間隔メッシュを用いている。境界条件は、X 及び Z 方向に周期境界を与え、壁境界条件は non-slip 条件を与えた。また、LES ではフィルター幅よりも小さなスケールの運動をモデル化しているので、層流から乱流への遷移領域の解析には適していない。よって、初期条件は、DNS データの乱れに正規乱数を加えたデータとした。レイノルズ数はチャンネル幅 ($H=2\delta$) と壁面摩擦速度 u_τ で定義される $Re_\tau=200$ とした。また、主流方向に対しては周期境界を与えてるため圧力勾配 ($\partial p/\partial x=-2$) を与えることで流れを維持した。同定計算の検討ケースとしては、パラメーター C_s の初期値の違いにより 5 ケースの検討を行った。時間刻み幅は $\Delta t=0.001$ とし、20 秒まで計算した後、2 秒後の時間、空間の平均をとっている。

6 計算結果

各検討ケースに対するパラメーター C_s の収束状況をそれぞれ図 1 に示す。各ケースにおいて同定された C_s を用いて LES 解析された主流方向の平均速度分布を図 2 に示す。また同様に、図 3、4 に各方向の乱れ強さを示す。ここに笠木¹らの DNS データを一緒に示しておく。各ケースにおける収束解は得られたものの、初期値に応じて収束値に違いが示された。対数領域での平均速度分布は DNS データと良好に一致した。壁近傍において若干低めの結果を示すものの、ほぼ DNS データと一致した。

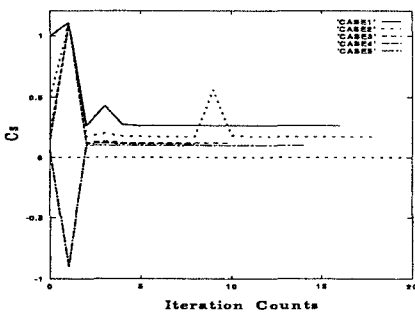


図 1 C_s の収束状況

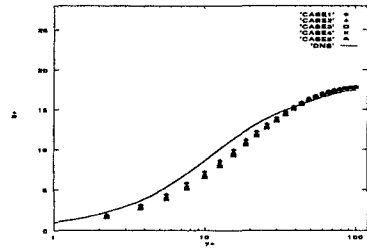


図 2 主流方向の平均速度分布

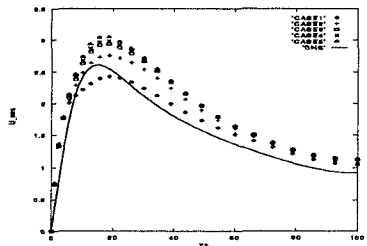


図 3 主流方向の乱れ強さ

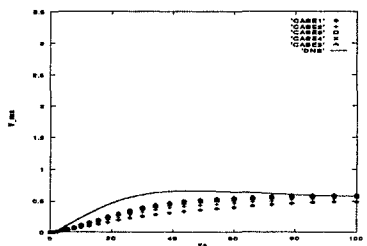


図 4 壁垂直方向速度の乱れ強さ

主流方向の乱れ強さは、やや大きいものの各ケース共にほぼ DNS データと一致した結果が得られた。壁垂直方向の乱れ強さの場合、バッファ領域においてやや低めの値を示すものの、ほぼ DNS データと一致した結果が得られた。しかしながら、いずれも全体的には定性的、定量的に一致したものが得られている。

7 おわりに

準ニュートン法により同定したスマゴリンスキー定数 C_s を用いて、チャンネル乱流を有限要素法を用いて解析した。計算結果は評価関数で定義されたように主流方向の平均速度については DNS データとよく一致した。

参考文献

- [1] Kasagi, N., "Direct numerical simulation data bases: An effective tool in fundamental studies of turbulent heat transfer," in *Computers and Computing in Heat Transfer Science and Engineering*, 97-117, CRC Press, Boca Raton, (1992).