

I - B1

安定化有限要素法による非圧縮粘性乱流解析

○ 中央大学大学院 学生会員 宮森 俊和
東京ガス 正会員 猪股 渉
中央大学 正会員 榎山 和男

1. はじめに

乱流解析を DNS (Direct Numerical Simulation) により行なうには、Kolmogorov Scale 程度の要素分割が要求されるため膨大な記憶容量が必要となり、最高速のコンピュータを用いても、取り扱えるレイノルズ数には限界がある。したがって、高レイノルズ数流れを解析するためには、乱流モデルを導入する必要があると言える。

そこで本稿では、流速双1次・圧力区分0次で補間する Q_1 - P_0 要素に基づく有限要素法に安定化を施し (SUPG 法および安定化行列)¹⁾、これをベースにした、通例の Smagorinsky 渦粘性モデル²⁾ による LES (Large Eddy Simulation) を、円柱周りの流れ解析について行ない、本手法の有効性を検討することを目的とする。

2. 解析手法

2.1. LES の基礎方程式

Smagorinsky 渦粘性モデルを導入した LES の基礎方程式²⁾ は、次のようになる。

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \bar{u}_{i,j} + P_i = \left(\frac{1}{Re} + \nu_{SGS} \right) \bar{u}_{i,jj} \quad (1)$$

$$\bar{u}_{i,i} = 0 \quad (2)$$

$$\nu_{SGS} = (C_s \Delta)^2 \sqrt{\bar{u}_{i,j} (\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i})} \quad (3)$$

$$P = \bar{p} + \frac{2}{3} k_{SGS} \quad (4)$$

ここで、 $\bar{u}_i$ は i 方向への偏微分、 u_i は流速の i 方向成分、 p は圧力、 Re はレイノルズ数、 ν_{SGS} は SGS 渦粘性係数、 C_s は Smagorinsky 定数、 Δ は要素スケール、 k_{SGS} は SGS 乱流エネルギーを表す。また、(1) 式の移流項の Leonard・Cross 項は無視されており、(4) 式の SGS 乱流エネルギーはモデル化しないで圧力と一括評価している。

2.2. 時間・空間方向の離散化

本研究では、時間方向には修正準陽解法、空間方向には SUPG (Streamline Upwind / Petrov-Galerkin) 法に基づく重み付き残差法を用いる¹⁾。離散化すると、次の式が導かれる。ただし、これ以降は GS (Grid Scale) 成分を表す上付きの $\bar{\cdot}$ を省略する。

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + M_C^{-1} K(u_j^n) u_i^n = M_L^{-1} C \cdot P^{n+1} - \left(\frac{1}{Re} + \nu_{SGS}^n \right) M_C^{-1} S \cdot u_i^n \quad (5)$$

$$C^T u_i^{n+1} + D \Delta t \cdot P^{n+1} = 0 \quad (6)$$

ここで、 K, C, S は移流・圧力・拡散項の係数行列であり、 M_C はコンシステント質量行列、 M_L は集中化質量行列である。また D は拡散型圧力安定化行列¹⁾ であり、圧力の数値解のチェッカーボードモードを避けるものである。そして、(5),(6) 式を連立させると (7) 式が得られる。

$$\begin{bmatrix} M_C & -M_C M_L^{-1} C \\ C^T & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i^{n+1} \\ \Delta t \cdot P^{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_i^n \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

ここで、 b_i^n は運動方程式の既知項をまとめたものである。さらに、記憶容量低減のために最終行を掃き出し、圧力のポアソン方程式 (8) を導く。

$$(C^T M_L^{-1} C + D) \Delta t \cdot P^{n+1} = -C^T M_C^{-1} b_i^n \quad (8)$$

3. 円柱周りの流れ解析

数値解析例として、円柱周りの2次元・3次元解析を、レイノルズ数が $Re = 10^2 \sim 10^6$ の場合について行なった。なお Smagorinsky 定数は、2次元解析では 0.12、3次元解析では 0.10 とした²⁾。

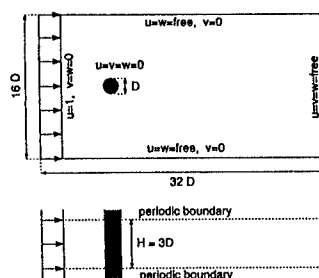


図1. 解析領域図

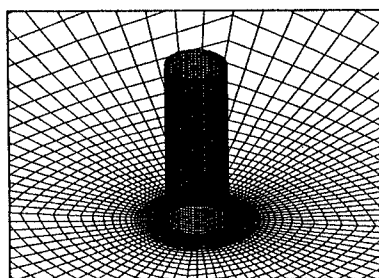


図2. 3次元有限要素メッシュの円柱近傍図

Key Words : Q_1 - P_0 Stabilized FEM,
Large Eddy Simulation,
Smagorinsky's eddy viscosity model

連絡先 : 〒112 東京都文京区春日 1-13-27
TEL 03-3817-1815, FAX 03-3817-1803

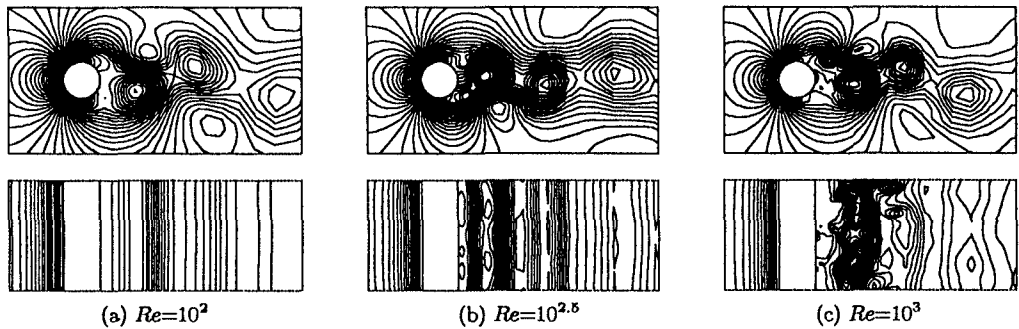


図3. 水平および鉛直方向の中心断面における圧力分布図（DNS）

2次元解析では、図1に示す解析領域に対して円柱直径を D と定義し、有限要素分割（節点数 4270，要素数 4166，径方向最小メッシュ幅 $0.006D$ ）した。3次元解析では、図1の解析条件で図2に示すように、長さ $H=3D$ を円柱スパン方向に60層に等分割した。なお3次元解析の初期値は、2次元解析により得られる充分に発達したカルマン渦流れを、スパン方向に積み重ねて与え、初期においてスパン方向に攪乱を与えた。

図3に、レイノルズ数が $10^2, 10^{2.5}, 10^3$ の場合の3次元DNSによる中心断面での圧力分布を示す。図より、 $Re=10^2$ では3次元性の全く見られない2次元流れとなっているが、 $Re=10^{2.5}$ では若干の3次元性が現れ始め、 $Re=10^3$ では3次元性が強まっている。また図4に、2次元と3次元DNSによる抗力係数 C_D およびストローハル数 S_t の解析値を実験値とともに示す。図より、3次元DNSでは亜臨界域から超臨界域への境界レイノルズ数 ($Re=3.8 \times 10^5$) 付近における抗力係数の低下など、幅広いレイノルズ数域で実験値との定性的な良い一致を示している。なお、本解析で用いた有限要素メッシュの径方向最小メッシュ幅が $Re=10^4$ 程度の Kolmogorov Scale に相当することなどから、同程度のレイノルズ数域までが特性値の定量的な評価において信頼性の高いものであると言える。

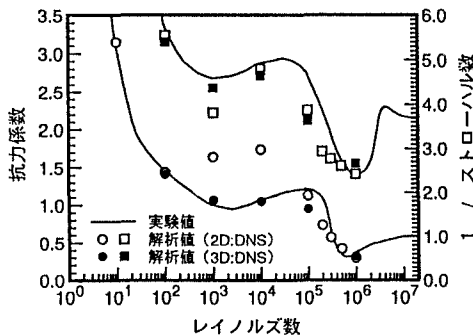


図4. 2次元と3次元DNSによる C_D, S_t

次に、 10^4 程度以上のレイノルズ数域における特性値の定量的な評価を行なうためにLESを行なった。図5に、2次元DNSとLESによる抗力係数およびストローハル数の解析値を実験値とともに示す。図より2次元解析では、LESはDNSに対し境界レイノルズ数付近における抗力係数の低下傾向が緩やかになっている。これはLESがDNSに対しSGS渦粘性係数を付加した形であるために、DNSに比べて大きな粘性効果が働いているためと考えられる。

4. おわりに

本稿では、 Q_1-P_0 要素に基づく安定化有限要素法による、円柱周りの2次元および3次元DNSと2次元LESの結果を示した。高レイノルズ数域への定量的評価の方法として、LESは微細メッシュを用いるよりも現実的な方法であると考えられる。なお、3次元LESによる結果は、発表時に述べる予定である。

参考文献

- 1) 猪股 渉, 檜山 和男: "Q1/P0 要素を用いた安定化有限要素法による流れ解析": 土木学会 第51回 年次学術講演会 概要集, p.254-255: (1996)
- 2) "第36回 生研講習会テキスト LES 入門": 財団法人 生産技術研究奨励会, p.13-19: (1993)

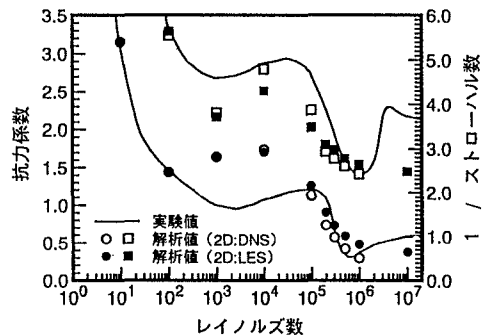


図5. 2次元DNSとLESによる C_D, S_t