土木学会第52回年次学術講演会（平成９年９月）

I－A277　せん断剛性を考慮したケーブルの振動応力

○ 新構造技術（株）　正会員　高野　覚
フェロー　倉西　茂

1．はじめに

近年、ケーブル構造物が数多く建設されているがケーブル部材は風等により振動が起き易く、しかもケーブル両端は固定されているので端部では曲げ応力が大きくなることが解っている。また、ケーブルは素線を束ねてできているのでケーブルが一体して変形するのではなく、素線のずれによりせん断変形をする。その時の端部における曲げ応力は小さくなることが予想される。本研究の目的は、このせん断剛性が端部における曲げ応力にどのように影響を与えているかを求めるものである。振動に関するパラメーターを無次元化し、端部に生じる曲率を示す図を提示する。

2．解析方法

直線ケーブルの振動方程式は、一般にはりは平面保持の仮定を用いて求められてまた、ここでは断面が変形後も平面を保持するが、軸線に対する直角は保持されないTimoshenkoはりにより曲げの振動方程式を求める。

2．1　振動方程式

軸力を受けるTimoshenkoはりの曲げ問題の振動方程式は、曲げ剛性EI、せん断剛性GkAを用いると[1)]

$$EI\left(1+\frac{T}{GkA}\right)\frac{\partial^4 y}{\partial \chi^4}-T\frac{\partial^2 y}{\partial \chi^2}+m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-\frac{mEI}{GkA}\frac{\partial^4 y}{\partial \chi^2 \partial t^2}=0 \qquad \cdots\cdots（１）$$

と表される。この微分方程式の一般解は、

$$f(\chi)=C_1\cosh\alpha\chi+C_2\sinh\alpha\chi+C_3\cos\beta\chi+C_4\sin\beta\chi \qquad \cdots\cdots（２）$$

で表される。両端固定はりの座屈荷重$T_E=4\pi^2EI/\ell^2$を置き、弦の円振動数$\omega_T=(\pi/\ell)\sqrt{T/m}$を用いて

$\bar{t}=T/T_E$, $\bar{\omega}=\omega/\omega_T$, $\bar{s}=GkA/T_E$ なるパラメターを導入してα,βを書き表すと次式が得られる。

$$\alpha\ell=\pi\sqrt{\frac{\bar{t}\left(4\cdot\bar{s}-\bar{\omega}^2\right)}{4\left(\bar{s}+\bar{t}\right)}}\sqrt{2+2\sqrt{1+\frac{16\left(\bar{s}+\bar{t}\right)\bar{\omega}^2}{\bar{t}\cdot\left(4\cdot\bar{s}-\bar{\omega}^2\right)^2}}} \qquad \beta\ell=\pi\sqrt{\frac{\bar{t}\left(4\cdot\bar{s}-\bar{\omega}^2\right)}{4\left(\bar{s}+\bar{t}\right)}}\sqrt{-2+2\sqrt{1+\frac{16\left(\bar{s}+\bar{t}\right)\bar{\omega}^2}{\bar{t}\cdot\left(4\cdot\bar{s}-\bar{\omega}^2\right)^2}}}$$

ここで、$G\to\infty$にした値すなわち$\bar{s}\to\infty$がせん断変形の影響を考えないはり理論の時の値になる。（２）式にせん断変形を考慮した両端固定はりの境界条件を入れると、振動数方程式は次式で与えられる。

$$2\alpha\ell\cdot\beta\ell\left(\frac{1}{\cosh\alpha\ell}-\cos\beta\ell\right)\left(1+\bar{\alpha}\ell\right)\left(1-\bar{\beta}\ell\right)+\left[(\alpha\ell)^2\left(1+\bar{\alpha}\ell\right)^2-(\beta\ell)^2\left(1-\bar{\beta}\ell\right)^2\right]\tanh\alpha\ell\sin\beta\ell=0 \qquad \cdots\cdots（３）$$

ここで、 $\bar{\alpha}\ell=\bar{t}\cdot\bar{s}\left\{\left(\frac{\alpha\ell}{2\pi}\right)^2\frac{1}{\bar{t}}+\frac{\bar{s}\cdot\bar{\omega}^2}{4}+\left(\frac{\alpha\ell}{2\pi}\right)^2\bar{s}\right\}$ 　 $\bar{\beta}\ell=\bar{t}\cdot\bar{s}\left\{\left(\frac{\beta\ell}{2\pi}\right)^2\frac{1}{\bar{t}}-\frac{\bar{s}\cdot\bar{\omega}^2}{4}+\left(\frac{\beta\ell}{2\pi}\right)^2\bar{s}\right\}$

3．固有振動数と端部における曲率、曲げ応力

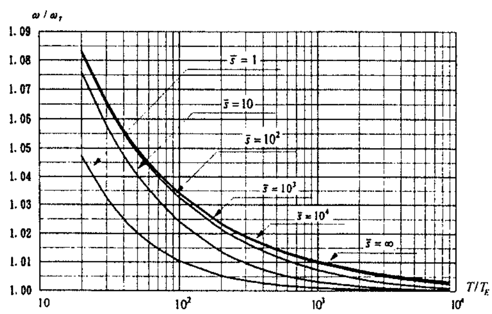
（２）式の係数を定め、（３）式より固有振動数を求めると図－１を得る。$\chi=\ell/2$のときの振幅をδし$\delta/\ell=r$と置く。$\chi=0$での曲率を求めると次式を得る。

$$\ell f''(\chi) = r\frac{\ell^2(\alpha^2+\beta^2)}{\cosh\frac{\alpha\ell}{2}+\overline{C}_2\sinh\frac{\alpha\ell}{2}-\cos\frac{\beta\ell}{2}+\overline{C}_4\sin\frac{\beta\ell}{2}} \quad \cdots\cdots (4)$$

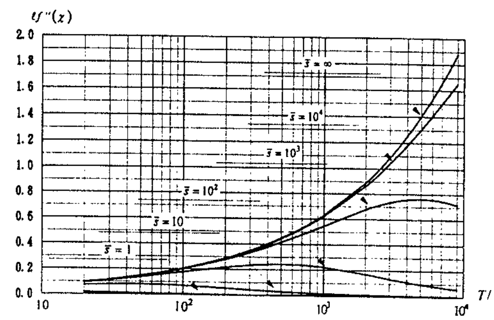
ここで、 $\overline{C}_2=\frac{\beta(1-\overline{\beta}\ell)(\cos\beta\ell-\cosh\alpha\ell)}{\sinh\alpha\ell-\alpha(1+\overline{\alpha}\ell)\sin\beta\ell}$ $\quad\overline{C}_4=\frac{\alpha(1+\overline{\alpha}\ell)\cos\beta\ell-\alpha(1+\overline{\alpha}\ell)\cosh\alpha\ell}{\beta(1-\overline{\beta}\ell)\sinh\alpha\ell-\alpha(1+\overline{\alpha}\ell)\sin\alpha\ell}$

（４）式を図示すると図－２となる。

図－１　無次元化した固有振動数と張力の関係



図－２　無次元化した曲率と張力の関係



４．実橋例

実際に橋梁に用いられるケーブルのヤング率は、$E = 200\,GN/m^2$で 初期応力を$\sigma = 500\,MN/m^2$とする。$G = 8\,GN/m^2$せん断弾性係数は、鋼材のそれの 1 / 10 と仮定し曲げ応力を求める。ここで斜張橋、吊橋の２タイプのケーブル構造物と１本の素線を取り上げたのが表－１，２になる。

表－1　各ケーブルの端部における曲げ応力

種類	ケーブル長	断面の半径	T/T_E	GkA/T_E	せん断変形を考慮していない	せん断変形を考慮した
尾道大橋	100	0.03	900	1.5×10^4	35.9	32.8
横浜ベイブリッヂ	250	0.05	2000	3.1×10^4	35.6	32.4
関門橋	450	0.35	140	2.1×10^3	37.4	35.8
GoldenGateBridge	700	0.50	320	5.0×10^3	51.4	46.8

長さの単位：m　　曲げ応力の単位：MN/m^2

表－2　１本の素線における端部の曲げ応力

種類	ケーブル長	断面の半径	T/T_E	端部における曲げ応力
１本の素線	10～500	0.0025	1.3×10^4 ～ 3.1×10^7	11.0～11.3

５．まとめ

せん断変形の影響を考慮した Timoshenko 梁の時は、影響を無視していた Bernoulli-Euler 梁の時より、固有振動数、端部における曲げ応力ともに小さくなることが解った。

参考文献

西野文男・長谷川彰夫 ：土木学会編　新体系土木工学７　構造物の弾性解析、P.84. 85、技報堂出版

高野 覚・倉西 茂 ：　ケーブル固定部の振動曲げ応力　土木学会編　１９９６ 土木学会関東支部