土木学会第52回年次学術講演会（平成９年９月）

I－A115

接続マトリックスを用いた中間荷重作用の骨組構造解析

熊本工業大学　工学部　学生員　宮元　謙次

八代工業高等専門学校　土木建築工学科　正員　橋本　淳也

熊本工業大学　工学部　正員　三池　亮次

1　はじめに

骨組構造の節点荷重pと部材断面力p_mの関係を規定するマトリックスである接続マトリックスCと部材両端断面力の関係を定める平衡マトリックスHを用いLiveselyは構造解析を試みている。荷重としては、節点荷重のみを対象としているが、ここでは、節点荷重以外に部材間に作用する分布荷重（以下　中間荷重という）が作用する場合の接続マトリックスを用いた構造解析の基礎式を組み立てる。

接続マトリックスを用いた解法は、座屈解析や最適設計等の、荷重の変位による微分などのアリゴリズムが単純で演算が容易になる。

2　接続マトリックスを用いた骨組構造解析

（１）両端固定荷重定数

骨組構造の長さℓの第I部材の始端iと終端jに作用する部材端力と変位を（$p_{I,i}$、$d_{I,i}$）、（$p_{I,j}$、$d_{I,j}$）、部材に作用する中間荷重の始端からの距離ξにおける荷重強度を$q_{I,\xi}$とする。

部材応力は、部材終端の断面力で代表させるものとしこれをp_{mI}と表す。このp_{mI}とp_{mI}に対応するひずみベクトルe_{mI}（始端を固定したときの終端の変位$d_{I,j}$）

$$p_{mI} = K_{mI}e_{mI} + c_{mI} \tag{1}$$

の関係がある。ここにK_{mI}は、部材剛性マトリックスc_{mI}は（１）式より図１、第I部材に作用する力両端が固定され$c_{mI}=0$の時の終端断面力p_{mI}のことであることがわかる。c_{mI}を両端固定荷重定数ということにする。式（１）を全部材について集め

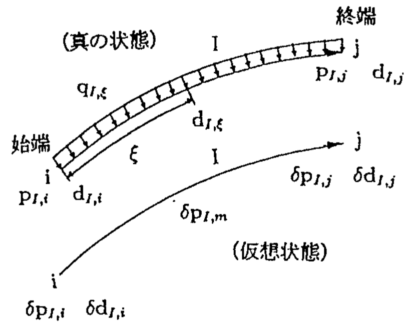

図１　第I部材に作用する力

$$p_m = K_m e_m + c_m \tag{2}$$

を得る。ここに、

$$K_m = \begin{bmatrix} K_{m1} & & & & \\ & K_{m2} & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & K_{mI} & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

$$c_m = \begin{bmatrix} c_{m1} \\ c_{m2} \\ \vdots \\ c_{mI} \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad p_m = \begin{bmatrix} p_{m1} \\ p_{m2} \\ \vdots \\ p_{mI} \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{3}$$

上式でK_mがブロック対角マトリックスとなることがコンピュータープログラムで大容量を必要とする理由である。

（２）一端固定荷重定数

中間荷重が作用するときの部材断面力p_mと、節点外力pの間には、接続マトリックスCを用い，

$$p = Cp_m + c_L \tag{4}$$

のように表すことができる。ここにc_Lは、中間荷重作用による荷重項で各節点におけるつり合いより求めることが

†〒860　熊本市池田４丁目２２－１　Tel　096-326-3111

‡〒866　熊本県八代市平山新町2627　Tel　0965-35-1611

できる。第I部材の始端iと終端jにおける断面力$\mathbf{p}_{I,i},\mathbf{p}_{I,j}$の間には、中間荷重が作用する場合には、平衡マトリックスを用い

$$\mathbf{p}_{I,i} = -\mathbf{H}_{ij}\mathbf{p}_{I,j} - \mathbf{q}_{LI,i} \qquad (5)$$

の関係がある。$\mathbf{q}_{LI,i}$は、始端固定で、終端が自由で$\mathbf{p}_{I,j} = \mathbf{0}$のときの中間荷重に基づく始端における断面力とは反対方向の力で、いわば、始端固定荷重項である。上式の断面力は、部材軸方向をξ軸とする部材座標形で与えられ軸方向がN、せん断力Q、曲げモーメントMを成分とするので、これに座標変換マトリックス$\mathbf{L}_{I,i}$を乗じて基準座標形に変換し節点における釣合式を立てる。I部材の節点は始端であるので$\mathbf{q}_{LI,i}$を考慮する必要があるが、i節点を共有するJ部材のi端は終端のとき、部材応力は終端の断面力で表せられるので、始端固定荷重項は、考慮する必要がない。以上の考察から式（4）は以下のようにして組み立てられる。

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{p}_i \\ \vdots \\ \mathbf{p}_j \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & -\mathbf{L}_{I,i}\mathbf{H}_{ij} & \cdots & \mathbf{L}_{J,i} & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & \mathbf{L}_{I,j} & \cdots & & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{p}_{mI} \\ \vdots \\ \mathbf{p}_{mJ} \\ \vdots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vdots \\ -\sum_I \mathbf{L}_{I,i}\mathbf{q}_{LI,i} \\ \vdots \\ 0+\cdots \\ \vdots \end{bmatrix} \qquad (6)$$

（３）基礎式の誘導　中間荷重の作用する真の状態と仮想力の間に補仮想仕事の原理を適用する。仮想力としては中間荷重は作用しないものとし、外力を$\delta\mathbf{p}$, 部材断面力（部材終端における）を$\delta\mathbf{p}_m$とする。補仮想仕事の原理は

$$\delta\mathbf{p}^T\mathbf{d} = \delta\mathbf{p}_m{}^T\mathbf{e}_m \qquad (7)$$

である。ここに、$\mathbf{d}$は、外力$\mathbf{p}$にともなう変位である。仮想力の間の次式

$$\delta\mathbf{p} = \mathbf{C}\delta\mathbf{p}_m \qquad (8)$$

を式（７）に代入、これを式（２）に用い

$$\mathbf{p}_m = \mathbf{K}_m\mathbf{C}^T\mathbf{d} + \mathbf{c}_m \qquad (9)$$

を得る。さらに、これを式（４）に用い、基礎式を得る。すなわち

$$\mathbf{p} = \mathbf{K}\mathbf{d} + \mathbf{c} \qquad (10)$$

ここに、

$$\mathbf{K} = \mathbf{C}\mathbf{K}_m\mathbf{C}^T, \mathbf{c} = \mathbf{C}\mathbf{c}_m + \mathbf{c}_L \qquad (11)$$

式（１０）における荷重項$\mathbf{c}$は、全節点を固定し、$\mathbf{d} = \mathbf{0}$としたときの、中間荷重と等価の節点荷重といえる。

3　適用例

図２のような断面２次モーメントI＝２００，０００cm^4、断面積A＝８０cm^2、ヤング率E＝２，１００，０００kgf/cm^2である正方形のラーメンに節点荷重と分布荷重qが作用する場合、上記の式に基づいてコンピュータによる反力及び応力を求めると図３のようになった。これはたわみ角の結果と比較しほぼ一致し荷重と構造が対称であるので反力・応力も対称な解を得ている。

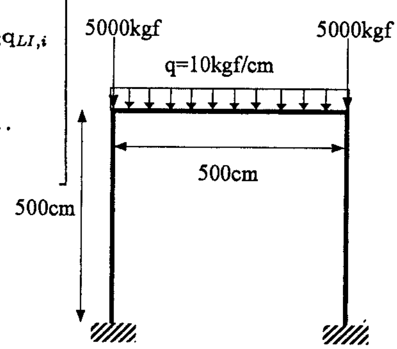

図２　モデル

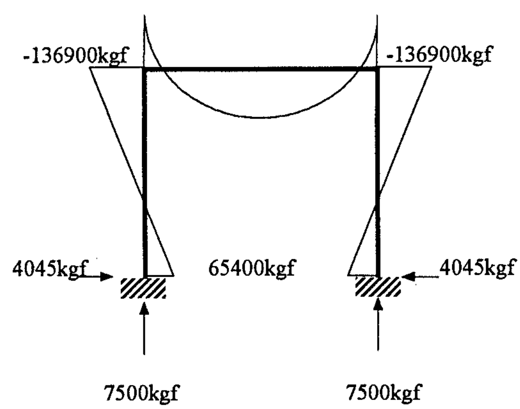

図３　反力とモーメント図