土木学会第52回年次学術講演会（平成９年９月）

I－A105　非線形構造物の動的載荷試験におけるリアルタイム同定手法の基礎的検討

京都大学大学院　学生員　阪部　真悟
京都大学工学研究科　フェロー　家村　浩和
京都大学工学研究科　正　員　五十嵐　晃

1. はじめに　振動台実験やハイブリッド実験、載荷実験における構造物の動的載荷の高精度化、実験結果の信頼性の向上には、供試体構造系の物理特性値を用いることが有効であることが明らかにされている。そこで本研究では実験において高精度化を図るため各ステップごとに同定した動特性を、時々刻々の載荷ステップにおいて用いることができるオンラインでの同定手法を検討した。本研究では最小二乗法、逐次最小二乗法、及び多変量ARMAモデルに基づくカルマンフィルターを用いた方法を対象として、特に非線形性を有する構造物の時々刻々変化する動特性に対するリアルタイム同定への実際的な適用可能性を調べるため、数値計算により逐次同定を行い、同定手法の計算時間、精度、安定性、及び追従性に着目した検討を行った。

2. 同定手法　ここでは次の三種の同定手法を特に取り上げた。

(1) 最小二乗法　加振入力加速度が多自由度系構造物に作用するときの基本運動方程式は次式のように表される。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t)+\mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t)+\mathbf{K}\mathbf{x}(t)=-\mathbf{f}(t)$$

$\mathbf{f}(t)$は外力ベクトルで、$\mathbf{X}$を過去mステップにおいて得られた観測値よりなるマトリックス、$\mathbf{a}$を同定したいパラメーターよりなるベクトルとすると、次のように定式化される。

$\mathbf{y}=\mathbf{X}\mathbf{a}$　$[\ \mathbf{y}=-\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t)-\mathbf{f}(t)\ ]$　$\mathbf{a}=(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{y}$　この手続きを、観測値マトリックス$\mathbf{X}_i$を各ステップにおいて更新しつつ繰り返すことにより同定値を得ることができる。

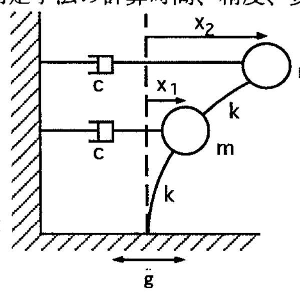

図1 2自由度モデル

m=100.0(kg)　c=0.250(N sec/cm)　k=40.0(N/cm)

固有周期　T1=1.6(sec)　T2=0.6(sec)

(2) カルマンフィルターによる同定手法[1)]　本手法では基本運動方程式を多変量ARMAモデルで表すことにより、カルマンフィルターのアルゴリズムからまずARMA係数行列を同定し、ARMA係数行列と物理特性値との関係から間接的に推定する。入力加速度が多自由度系構造物に作用するときの運動方程式を状態方程式として表し、さらに離散化を行うと次のような多変量ARMAモデルで表すことができる。

$$\mathbf{X}_{n+1}=\Phi\mathbf{X}_n+\Gamma[-\mathbf{f}_n]$$

ここで　Φ,ΓはARMA係数行列である。

ARMA係数行列をカルマンフィルターのアルゴリズムにより同定するために、状態方程式と観測方程式を設定する。ここで対象構造物はせん断ばり型の構造物であると仮定する。

$$[\Phi_{11}\cdots\Phi_{1\,2n}\Gamma_{11}\cdots\Gamma_{1\,n}\Phi_{21}\cdots\Gamma_{2n\,n}]^T_{n+1}=[\Phi_{11}\cdots\Phi_{1\,2n}\Gamma_{11}\cdots\Gamma_{1\,n}\Phi_{21}\cdots\Gamma_{2n\,n}]^T_n \qquad \text{(状態方程式)}$$

$$\text{第 i 層}\quad \begin{pmatrix} x^{(i)}_{n+1} \\ \dot{x}^{(i)}_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H} \end{pmatrix}(\Phi_{i1}\cdots\Phi_{i\,2n}\Gamma_{i1}\cdots\Gamma_{i\,n}\Phi_{n+i\,1}\cdots\Phi_{n+i\,2n}\Gamma_{n+i\,1}\cdots\Gamma_{n+i\,n})^T+\mathbf{W}_n \qquad \text{(観測方程式)}$$

ここで$\mathbf{W}_n$は観測誤差ベクトルである。これらの状態空間表示式は線形となり、カルマンフィルターのアルゴリズムによりARMA係数行列を同定することができる。

(3) 逐次最小二乗法　ステップkまでの観測値を用いて得られた同定値を各ステップにおき次式により逐次更新していく。

$$\mathbf{a}_{k+1}=\mathbf{a}_k+\mathbf{P}_k\mathbf{X}^T_{k+1}\left[\mathbf{I}+\mathbf{X}_{k+1}\mathbf{P}_{k+1}\mathbf{X}^T_{k+1}\right]^{-1}(\mathbf{y}_{k+1}-\mathbf{X}_{k+1}\mathbf{a}_k) \qquad \mathbf{P}^{-1}_{k+1}=\mathbf{P}^{-1}_k+\mathbf{X}^T_{k+1}\mathbf{X}_{k+1}$$

ここで$\mathbf{X}_{k+1}$はステップk+1における観測値よりなるマトリックス、$\mathbf{P}_k$はそのステップまでの観測値の共分散行列である。

3. 非線形特性同定の計算例　ここで取り上げた手法は線形構造物を想定しているものであり、理論的

キーワード　リアルタイム同定　最小二乗法　カルマンフィルター
連絡先　京都市左京区吉田本町　TEL: 075-753-5087 FAX: 075-753-5926

には線形構造物については適切な条件下では収束値として真値を精度良く推定することができる手法である。しかし、ここで検討しているような非線形特性を持つ構造物の同定にこれらの手法を適用する上で注目すべき点は、安定性と追従性の２点に集約される。すなわち、まず第１に実験に用いる上での前提条件として、安定した動作が確保できることが必要であり、第２に、時間的に構造特性が変化する非線形特性を的確に捉えることができる性能（追従性）を備えている必要がある。精度および信頼性の高い同定結果を得るためにはこの２つの性質が同時に満たされている必要があるが、これらは多くの場合背反する要求であることが多い。これを示すため、それぞれの手法に関する数値計算例を次に示す。

図１に示す、２自由度の非線形履歴復元力特性を持つ構造モデルを想定する。El Centro記録を入力として応答計算を行い（時間刻み=0.02秒）、これを同定のための計測データとして使用するものとする。各ステップにおける応答値（変位、速度など）の増分値を各々の手法の入力データとして用い、接線剛性行列を適切に推定できるかどうかに着目する。最小二乗法、逐次的最小二乗法アルゴリズム、カルマンフィルターに基づく手法を用いて、２層目の接線剛性を推定した結果をそれぞれ図３、４、５に示す。

最小二乗法（図２）では、各時点より過去25ステップ・50ステップの２種類の計測値を用いた結果を示している。特に剛性が急変する時点で不安定に陥りやすい傾向がある。25ステップ程度のデータでは、かなり不安定な結果しか得られない。

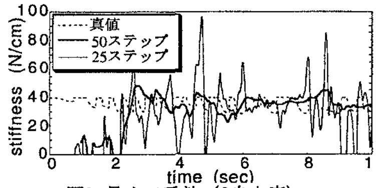

図2 最小二乗法（2自由度）

ここで取り上げた逐次最小二乗法アルゴリズムを用いた場合、各時点以前に得られたデータをすべてを考慮して適合する特性値を推定していることに相当する。ほとんどの時点で極めて安定した結果を与えているが、特に時刻歴後半においては接線剛性変化をほとんど反映しない推定結果となる。なお、開始直後の２秒間程度は、独立した２つのモードの応答が励起されていないため、非常に精度の劣る推定値となっている。

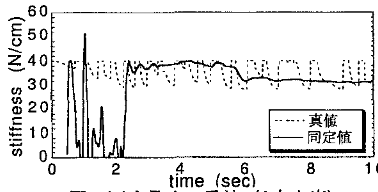

図3 逐次最小二乗法（2自由度）

カルマンフィルターを用いた場合も同様に、一般的に時刻を経るほど安定した結果を得る事ができるが、図４では剛性の変化を結果に反映させるために、$\mathbf{X}_i-\mathbf{H}_i\bar{\mathbf{x}}_i$ の要素が特定の値を越えた場合に、剛性の初期剛性への急変が発生していると判定し、推定値を初期値に戻すようにアルゴリズムを修正したものを用いた結果を示している。CASE1とCASE2では異なった推定誤差共分散の初期値を用いている。カルマンフィルターでは種々のパラメータを調整することにより同定精度を向上することができる反面、これには試行を繰り返すことが避けられない。

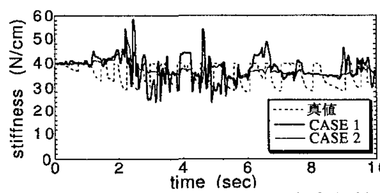

図4 カルマンフィルター（2自由度）

4. 計算量の比較とリアルタイム計算への適用　リアルタイムでの適用の観点からは、アルゴリズムの計算時間も重要な要素である。特に多数の自由度を扱う場合、固有振動数の高い構造物を扱う際に大きな問題となる可能性がある。計算量から見た３種類のアルゴリズムを概算的に比較すれば、次のようになる。(1)最小二乗法：$S(8n^3+2n^2)$回の乗算演算、2nX2nの逆行列演算１回（ただしS:推定に用いる過去ステップ数）(2)逐次最小二乗法：$16n^3+4n^2$回の乗算演算、nXnおよび2nX2nの逆行列演算各１回(3)カルマンフィルター：$22n^3+128n^2+48n$回の乗算演算、6nX6n（２回）および2nX2n（１回）の逆行列演算、2nX2nの固有値演算１回. この比較より、逐次型の最小二乗法アルゴリズムが有利であると考えられ、カルマンフィルターは計算量の観点からはかなり不利であることがわかる。特に本研究の例では、計算量を節約するために構造物がせん断型でモデル化されると仮定している。一般的な多自由度構造物の場合、ここに示すよりもはるかに多量の計算が必要であることにも留意する必要がある。

参考文献 1)斉藤・星谷：構造物の同定・予測・制御に関する基礎的考察、土木学会論文集、第489号I-27、1994.