

I - A103

拡張カルマンフィルタを用いた熱伝導問題の境界条件の逆解析

— 定式化と適用例 —

清水建設 正会員 新美勝之・鈴木 誠
中部電力 正会員 上田 稔・佐藤正俊

1. はじめに

コンクリート重力式ダムなどのマスコンクリート構造物においては、施工時のセメントの水和熱による温度ひび割れの発生を防止するために、設計段階から精度の高い温度応力解析が要求される。コンクリートの温度応力に影響する因子のうち、養生面での大気との伝達熱量および日光による輻射熱量は、気象条件に左右されることなどから、これらを合理的に設定することが重要となる。解析に用いる養生面での熱伝達係数と日射吸収率を、それぞれ観測値から推定しようとした研究は、これまでもいくつかなされてきている^{1,2)}。本研究では、両者の同時推定を目的に、拡張カルマンフィルタ³⁾を用いた逐次同定手法を提案し、その適用性を検討する。

2. 解析手法

提案する手法は、非定常熱伝導有限要素解析を状態空間モデルに取り込み、拡張カルマンフィルタで熱伝達係数と日射吸収率を逐次同定しようとするものである。

(1) 非定常熱伝導問題

本研究では、大気との熱伝達と日射による表面発熱を境界条件で考慮した非定常熱伝導問題を対象にする。非定常熱伝導問題の支配方程式は、式(1)で表される。

$$\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right) = Q \quad (1)$$

ここに、 θ は温度、 ρ は密度、 c は比熱、 λ_i は x_i 方向の熱伝導率、 Q は物体の内部発熱である。境界条件は、大気との熱伝達境界(S_1)および日射による発熱境界(S_2)の2種類を考慮するものとし、それぞれの境界での熱流束 q は、式(2)と式(3)で表され、境界条件は式(4)で表される。

$$q = \alpha_c (\theta - \theta_c) \quad \text{on } S_1 \quad (2)$$

$$q = -\gamma g \quad \text{on } S_2 \quad (3)$$

$$\lambda_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} l_i + q = 0 \quad (4)$$

ここに α_c は熱伝達係数、 θ_c は気温、 γ は日射吸収率、 g は全天日射量、 l_i は境界法線ベクトルの方向余弦である。

(2) 有限要素法による非定常熱伝導解析

非定常熱伝導問題の支配方程式を、空間に関して離散化した系全体の有限要素方程式は次のように得られる。

$$M \dot{\theta} + K \theta = Q \quad (5)$$

ここに、 θ は節点温度ベクトル、 $\dot{\theta} = \partial \theta / \partial t$ である。また、 K は熱伝導に関するマトリクス、 M は熱容量に関する

マトリクス、 Q は熱流束ベクトルで内部発熱と式(4)の境界条件を含んでいる。式(5)をCrank-Nickolson法を用いて時間方向に積分することにより、時刻 $t=t_{i+1}=t_i+\Delta t$ における節点温度ベクトル θ_{i+1} は、次の漸化式で得られる。

$$\theta_{i+1} = \left(M_{i+1} + \frac{\Delta t}{2} K_{i+1} \right)^{-1} \left(M_i - \frac{\Delta t}{2} K_i \right) \theta_i + \frac{\Delta t}{2} \left(M_{i+1} + \frac{\Delta t}{2} K_{i+1} \right)^{-1} (Q_i + Q_{i+1}) \quad (6)$$

(3) 状態空間モデル

本手法では、物体内部の温度分布に加え、推定する熱伝達係数および日射吸収率をシステム状態量に導入して、状態空間モデルを構成する。時刻 t_i における状態ベクトル x_i を、式(7)のように定め、システム状態方程式と観測方程式を、それぞれ式(8)、式(9)に示す。

状態ベクトル

$$x_i = \langle \theta \quad \alpha_c \quad \gamma \rangle^T \quad (7)$$

システム状態方程式

$$x_{i+1} = f_i(x_i) + w_i \quad (8)$$

観測方程式

$$y_i = H_i x_i + v_i \quad (9)$$

ここに、 α_c は熱伝達係数ベクトル、 γ は日射吸収率ベクトルである。また、 f_i は状態遷移関数、 y_i は時刻 t_i における観測ベクトル、 H_i は観測マトリクス、 w_i 、 v_i はそれぞれシステムノイズ、観測ノイズのベクトルである。また、システムノイズ、観測ノイズの平均値は0、共分散マトリクスは次のように仮定する。

$$E \left\{ \begin{bmatrix} w_i \\ v_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_j^T & v_j^T \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} W_i & 0 \\ 0 & V_i \end{bmatrix} \delta_{ij}, \quad V_i > 0 \quad (10)$$

(4) 拡張カルマンフィルタ

式(8)において θ に関わる部分は、有限要素法の直接時間積分の式(6)を用いる。式(6)の K は、 α の関数であり、式(8)のシステム状態方程式は非線形になる。このため、拡張カルマンフィルタにより定式化を行う。なお、 α および γ に関しては時間的な変化がないものと仮定し、式(6)の K の評価には α_i を用いる。式(7)から式(9)で与えられる状態空間モデルに対する拡張カルマンフィルタは次のように表される。

フィルタ方程式

$$\hat{x}_{i+1/i} = f_i(\hat{x}_{i/i}) \quad (11)$$

$$\hat{x}_{i/i} = \hat{x}_{i/i-1} + K_{Gi} [y_i - H_i \hat{x}_{i/i-1}] \quad (12)$$

Key Words: extended Kalman filter, inverse analysis, heat conduction problem, boundary condition, finite element method

〒100 千代田区内幸町 2-2-2 富国生命ビル TEL 03(3508)8101 FAX 03(3508)2196

表-1 解析条件

コンクリート	熱伝導率(λ_c)	2.70W/m℃
	比熱(c)	1.10kJ/kg℃
	密度(ρ)	2.36t/m ³
	打込み時温度(θ_0)	20℃
	単位セメント量(C)	150kg/m ³
	断熱温度上昇特性	Q_∞ 30 r 0.582
外気温(θ_a)		20℃

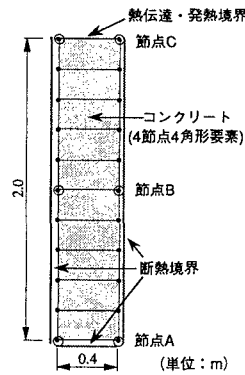


図-1 解析モデル

カルマンゲイン

$$K_{Gi} = P_{i/i-1} H_i^T [H_i P_{i/i-1} H_i^T + V_i]^{-1} \quad (13)$$

推定誤差共分散マトリクス

$$P_{i+1/i} = F_i P_{i/i} F_i^T + W_i \quad (14)$$

$$P_{i/i} = P_{i/i-1} - K_{Gi} H_i P_{i/i-1} \quad (15)$$

初期値

$$\hat{x}_{0/-1} = \bar{x}_0, \quad P_{0/-1} = \bar{P}_0 \quad (16)$$

上記の式で、 $\hat{x}$ は推定値を、添字 $i+1/i$ は時刻 t_i の情報に基づく時刻 t_{i+1} の値を表す。 F_i は状態遷移マトリクスで、式(8)を推定値のまわりで線形化して与えられる。

3. 適用例

本手法の有効性を検証するために、適用例を示す。解析対象は、熱伝達境界と断熱境界を有する領域にコンクリートを打設した際の実定常熱伝導問題である。上面の養生面が大气との熱伝達および日射発熱境界になっており、ここでの熱伝達係数と日射吸収率を推定する。有限要素法のモデル化は、2次元問題として扱った。有限要素モデルを図-1に、解析条件を表-1に示す。

解析手順は、まず熱伝達係数および日射吸収率を設定して順解析を行う。熱伝達係数 α の設定値は、図-4(a)に破線で示すような正弦波で与えた。日射量については、全日射量瞬間値を図-2のように与え、日射吸収率は0.5で一定と設定した。順解析結果の内、節点A,B,Cにおける温度経時変化を図-3に示す。節点Cは主に日射による発熱の影響を受け日変動が顕著であるが、節点Bではほとんど影響を受けていないことが分かる。

次に、この順解析結果の節点B,Cの温度を模擬観測データとみなし、熱伝達係数と日射吸収率を推定し、順解析で設定した値と比較する。なお、逆解析を実施する際は、推定値の初期値(α_0, γ_0)を設定値からずらした。

逆解析結果のうち、(a) 熱伝達係数の推定値、(b) 日射吸収率の推定値の経時変化図を、図-4に示す。熱伝達係数の推定値は、設定値の変動に追従しており、また日射吸収率の推定値は日射のある時間帯に徐々に設定値に収束しており、本手法の有効性が確認できた。

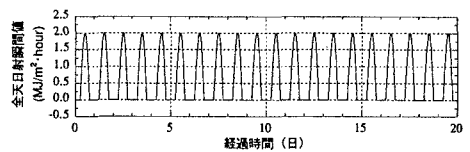


図-2 日射量設定値

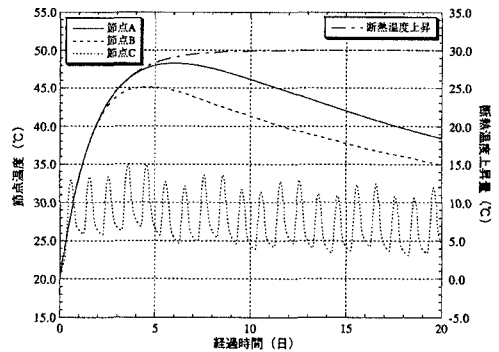
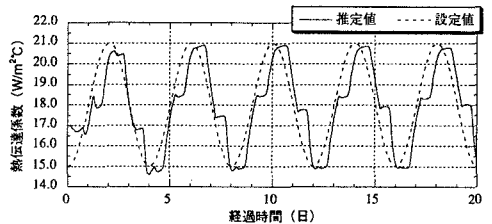
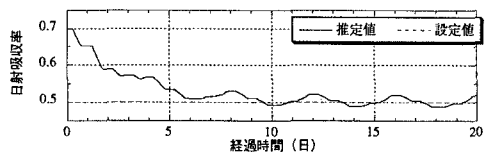


図-3 順解析結果 (節点温度経時変化)



(a) 熱伝達係数



(b) 日射吸収率

図-4 推定結果

4. おわりに

非定常熱伝導問題を対象に、拡張カルマンフィルタを用いて、境界における熱伝達係数と日射吸収率を同時に推定する手法を提案した。今後は、実測データに適用して気象条件等を考慮した熱伝達係数と日射吸収率の設計値の検討に役立てていく予定である。

参考文献

- 1) 山川秀次ほか：熱伝達率の試験ならびに実測例，マスコンクリートの温度応力発生メカニズムに関するコロキウム 論文集，pp19-26,1982.8.
- 2) 近久博志ほか：逆解析手法によるマスコンクリートの熱伝達係数の評価，土木学会論文集，No.451/V-17,pp39-47,1992.
- 3) 片山徹：応用カルマンフィルタ，朝倉書店，1983.