

I - A102

感度係数特性に基づく弾性連続体の逆解析

東洋大学 ^{※1}	学生会員	高久 芳則
東洋大学	正会員	新延 泰生
大東設計コンサルタント ^{※2}	正会員	榎本 覚雄
東京電機大学 ^{※3}	正会員	松井 邦人

1. はじめに

感度解析は、任意の解析変数の単位変動に対する構造物の応答を解析的に求めるものである。感度解析手法によれば、構造物の既知の応答量をもとに、構造物の未知の剛性を推定することが可能である。

そこで、本研究では、弾性連続体の感度解析理論を述べると共に、感度解析手法を用いた最小自乗法に基づく剛性の推定方法を弾性平面歪み地層モデルに適用し、通常良く用いられるGauss-Newton法との比較をしながら解析を行った。また、新たに Iso-parametric 要素を用いた Program を作成し解析を行った。

2. 感度解析手法

二次元弾性連続体の変位法による釣り合い方程式（状態方程式）は、式(1)で与えられる。式(1)の右辺は、荷重ベクトルのみとし、解析変数 X_i として剛性（ヤング率）を考える。式(1)の両辺を X_i で偏微分すると式(2)が得られる。式(2)の左辺の $\{\partial v_j / \partial X_i\}$ が i 要素の解析変数 X_i の微小変動に対する各変位の変動量を示すものであり、 i 要素の解析変数 X_i に対する各変位の感度係数を示している。

$$[K]\{v\} = \{R\} - \{F\}_p + \{F\}_b + \{F\}_{e0} + \{F\}_{o0} \quad (1)$$

$[K]$: 剛性マトリックス $\{F\}_b$: 連続体に作用する単位面積あたりの分布外荷重
 $\{v\}$: 変位ベクトル $\{F\}_{e0}$: 初期歪みによる節点力
 $\{R\}$: 荷重ベクトル $\{F\}_{o0}$: 初期応力によって生じる節点力ベクトル
 $\{F\}_p$: 連続体の物体力と等価な節点力

$$[K]\left\{\frac{\partial v_j}{\partial X_i}\right\} = [H] = -\left[\frac{\partial K}{\partial X_i}\right]\{v_j\} \quad (2)$$

3. 剛性推定方法

3.1 提案法

既知な変位量 $\bar{v}_j$ を地表面の測定点とし、 M 層の地層の未知の剛性 X_s を求める。

各層の剛性と測定変位等の初期条件を与えた状態で、各要素の測定点に関する感度を求め、その感度を式(3)に示すように層ごとに加算する。 $(m1, m2, m3)$ は、各層の最後の要素番号である。

それから、感度係数特性¹⁾式(4)を用いて、最小自乗法に基づいた未知の剛性 X_s に関する連立方程式(7)が得られる。なお、この式は、3.2 で述べる Gauss-Newton 法が近似式であるのに対して数学的に厳密である。

収束条件を式(8)のように設定し、収束判定を行い、収束条件を満足しない場合は、解析で得られた剛性 X_s を式(9)に示す方法により補正したものを新たな解析変数として再解析する。なお、式(9)の新たな解析変数 X_s^{i+1} は、前ステップの剛性 X_s^i を解析後の剛性 X_s^i で除したものを前ステップの剛性 X_s^i に乗じたものであり、式(4)の感度係数特性から得られるものである。

$$\frac{\partial v_j}{\partial X_i} = \sum_{l=1}^{m1} \frac{\partial v_l}{\partial X_i} \frac{\partial v_j}{\partial X_l} = \sum_{l=m1+1}^{m2} \frac{\partial v_l}{\partial X_i} \frac{\partial v_j}{\partial X_l} = \sum_{l=m2+1}^{m3} \frac{\partial v_l}{\partial X_i} \frac{\partial v_j}{\partial X_l}, \dots \quad (j=1, 2, 3, \dots, \ell) \quad (3)$$

$$v_j = -\sum_{s=1}^M \frac{\partial v_j}{\partial X_s} X_s \quad (4)$$

$$Q = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\ell} (\bar{v}_j - v_j)^2 \quad (5)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial X_k} = \sum_{j=1}^{\ell} (\bar{v}_j - v_j) \left(\frac{\partial v_j}{\partial X_k} \right) = \sum_{j=1}^{\ell} \left(\bar{v}_j + \sum_{s=1}^M \frac{\partial v_j}{\partial X_s} X_s \right) \left(\frac{\partial v_j}{\partial X_k} \right) = 0 \quad (6)$$

$$\sum_{s=1}^M \left(\sum_{j=1}^{\ell} \frac{\partial v_j}{\partial X_s} \frac{\partial v_j}{\partial X_k} \right) X_s = - \sum_{j=1}^{\ell} \bar{v}_j \frac{\partial v_j}{\partial X_k} \quad (7)$$

$$\left| \frac{X_s^{i+1} - X_s^i}{X_s^i} \right| \leq \varepsilon \quad (8)$$

$$X_s^{i+1} = X_s^i \frac{X_s^i}{X_s^i} \quad (9)$$

※1 〒350 埼玉県川越市鯉井2100

※2 〒101 東京都千代田区神田佐久間町3-38 第5東ビル

※3 〒350-03 埼玉県比企郡鳩山町石坂

TEL 0492-39-1402 FAX 0492-31-4482

TEL 03-3861-1146 FAX 03-3861-7559

TEL 0492-96-2911 FAX 0492-96-6501

3.2 Gauss-Newton 法

Gauss-Newton 法は、定式化の過程において数学的近似 (2次の項を無視する) が含まれている点で、提案法とは異なる。

v_i に対応する測定変位を $\bar{v}_i$ とし、測定変位に含まれる誤差を ε とすると式(10)が得られる。

最小自乗法に基づき、 ΔX_s を求めるための連立方程式 (13) を作る。

収束条件を満足しない場合は、式(14)に示す方法により補正したものを新たな解析変数として再解析する。

$$\bar{v}_j = v_j + \sum_{s=1}^M \frac{\partial v_j}{\partial X_s} \Delta X_s + \varepsilon \quad (10)$$

$$Q = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^I \left(\bar{v}_j - v_j - \sum_{s=1}^M \frac{\partial v_j}{\partial X_s} \Delta X_s \right)^2 \quad (11)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial X_k} = \sum_{j=1}^I \left(\bar{v}_j - v_j - \sum_{s=1}^M \frac{\partial v_j}{\partial X_s} \Delta X_s \right) \left(-\frac{\partial v_j}{\partial X_k} \right) = 0 \quad (12)$$

$$\sum_{j=1}^I \left(\sum_{s=1}^M \frac{\partial v_j}{\partial X_s} \frac{\partial v_j}{\partial X_k} \right) \Delta X_s = - \sum_{j=1}^I (\bar{v}_j - v_j) \frac{\partial v_j}{\partial X_k} \quad (13)$$

$$X_s^{I+1} = X_s^I + \Delta X_s^I \quad (14)$$

4. 解析例 (地層モデル)

図1に示すような3層の異なるヤング率 (1層: 2000tf/m²、2層: 1500tf/m²、3層: 1000tf/m²) をもつ95節点24要素 (アイソパラメトリック二次要素) の平面歪み問題に対して、地表面の節点9に集中鉛直荷重 $P=2.0$ tf を載荷したモデルを考える。既知数となる地表面の測定変位 (奇数節点) は、上記のヤング率で通常の構造解析を行い設定する。設定された測定変位を既知数として未知数となる各層のヤング率を逆解析により同定する。地層のポアソン比は $\nu=0.48$ とし、収束条件は $\varepsilon=0.01$ とする。

初期設定ヤング率を通常の構造解析で得られたヤング率の10%、30%、50%、70%、100%、130%、150%、170%、190%に設定し、それぞれにおいて節点9の測定変位に $\pm 1\%$ 、 $\pm 2\%$ 、 $\pm 3\%$ 、 $\pm 4\%$ 、 $\pm 5\%$ 、 $\pm 10\%$ 、 $\pm 15\%$ 、 $\pm 20\%$ の誤差を与え、解析を行った。

解析を行った結果、ほとんどの場合で図2に示すように Gauss-Newton 法よりも提案法の方が、早く収束することがわかった。また、Gauss-Newton 法は提案法に比べ、初期設定ヤング率の設定に影響を受けやすく、初期設定ヤング率が実際のヤング率から離れるにつれ、収束回数が増加しやすいことがわかった。

また、図3に示すように推定ヤング率誤差は、両方法ともほぼ同じようになり、本解析モデルでは、推定値に対する測定変位誤差の影響は1層目が大きくなった。しかし、初期設定ヤング率が150%以上で測定変位誤差がプラスに大きい場合、Gauss-Newton 法では、結果が得られないことがわかった。

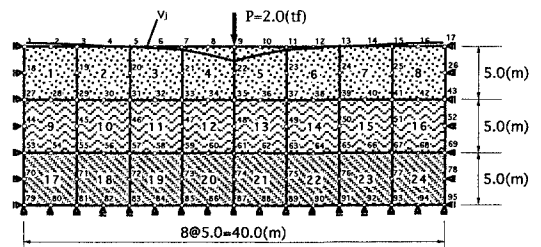
5. おわりに

数値シミュレーションでは、提案法の方が Gauss-Newton 法と比較して約半分の収束回数で解が得られることがわかった。

今後は、実際のデータを用いた解析を行いどの程度の精度が得られるかを確認したい。

(参考文献)

- 1) 新延、松井、菊田：骨組構造物の応答感度係数の特性、土木学会論文集、1992.7
- 2) 高野、新延、坂本：感度解析による弾性平面ひずみ問題の逆解析、土木学会関東支部技術研究発表会講演要集、1996.3



1層 2000(tf/m²) 2層 1500(tf/m²) 3層 1000(tf/m²) ポアソン比 $\nu=0.48$

図1 解析モデル

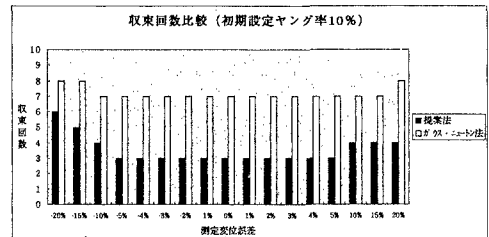


図2 収束回数比較

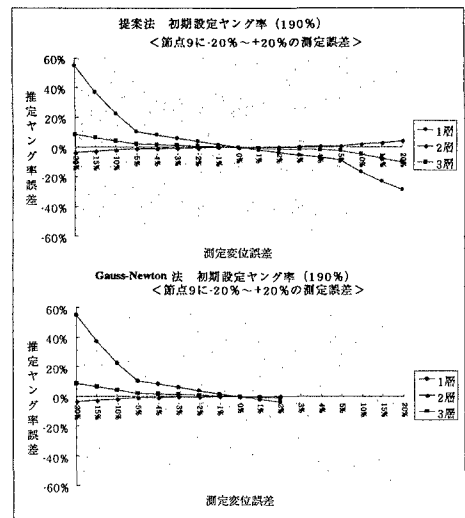


図3 推定ヤング率の誤差