

I - A90

曲線部材に対する平衡マトリックスを用いた骨組構造の座屈解析

八代高専 正員 ○橋本 淳也
 熊本工業大学 正員 三池 亮次
 熊本大学 正員 小林 一郎

1. はじめに

筆者らは先に、有限変位仮想仕事の定理に従って接続マトリックス C と平衡マトリックス H という骨組構造の形状を表すマトリックスを用いた有限変位骨組構造の基礎式を誘導した。

有限変位解析を行う際に、幾何剛性マトリックスは重要な情報を提供する。剛結骨組構造の場合、部材断面力として軸力・せん断力・曲げモーメントが作用するので、部材が初期状態において直線であっても変形の間状態や変形後状態には曲線になり、直線に近似することができない場合が生じてくる。よって、曲線部材の幾何剛性マトリックスが必要であると考え。

任意の曲線部材で構成される骨組構造の幾何剛性マトリックスを誘導し、それを用いた線形座屈解析を行い、この幾何剛性マトリックスの正当性について検討する。

2. 有限変位部材の平衡マトリックス

図1において、基準座標 (x, y) に対する部材傾斜角を ψ 、 i 端の傾角を ϕ_i 、 i 端の部材要素の回転角を θ_i とし、移動部材座標系 $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$ に対する i 端の傾角を $\tilde{\phi}_i$ とする。添字' は中間状態における値を示す。

中間状態において、部材始端 i' から部材軸に沿って ξ' の距離の点 b における部材断面力ベクトルを $p'_{m\xi}$ とすると、 $(b'j')$ 部材に関する部材断面力に関するつり合い式は、部材平衡マトリックス $H'_{\xi j}$ を用い

$$p'_{m\xi} + H'_{\xi j} p'_{mj} = 0 \quad (1)$$

変形後も同様に

$$p_{m\xi} + H_{\xi j} p_{mj} = 0 \quad (2)$$

なお、 $(b'j')$ 部材の始端の部材断面力は $-p'_{m\xi}$ である。移動座標系である $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$ 座標軸方向の成分をもつ部材断面力ベクトル $p_{m\xi}$ と p_{mj} の間には、平衡マトリックスは

$$\tilde{H}_{\xi j} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -\tilde{\eta} & \tilde{\xi} - \tilde{\xi}_j & -1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

であるから、 b および j 端における部材軸とそれに直交する座標軸からなる (ξ, η) 座標系の $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$ 座標系に対する座標変換マトリックスを $\tilde{L}_{\xi}$ 、 $\tilde{L}_j$ とすると式(2)における平衡マトリックス $H_{\xi j}$ は

$$H_{\xi j} = \tilde{L}_{\xi}^T \tilde{H}_{\xi j} \tilde{L}_j \quad (4)$$

と表される。ここに

$$\tilde{L}_{\xi} = \begin{bmatrix} \cos \tilde{\phi} & -\sin \tilde{\phi} & 0 \\ \sin \tilde{\phi} & \cos \tilde{\phi} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{L}_j = \begin{bmatrix} \cos \tilde{\phi}_j & -\sin \tilde{\phi}_j & 0 \\ \sin \tilde{\phi}_j & \cos \tilde{\phi}_j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

よって、変形後の状態における曲線部材を有する骨組構造の平衡マトリックス $H_{\xi j}$ を式(6)として得る。

$$H_{\xi j} = \begin{bmatrix} -\cos \tilde{\phi} \cos \tilde{\phi}_j - \sin \tilde{\phi} \sin \tilde{\phi}_j & \sin \tilde{\phi}_j \cos \tilde{\phi} - \cos \tilde{\phi}_j \sin \tilde{\phi} & 0 \\ -\sin \tilde{\phi}_j \cos \tilde{\phi} + \cos \tilde{\phi}_j \sin \tilde{\phi} & -\cos \tilde{\phi} \cos \tilde{\phi}_j - \sin \tilde{\phi} \sin \tilde{\phi}_j & 0 \\ -\tilde{\eta} \cos \tilde{\phi}_j + (\tilde{\xi} - \tilde{\xi}_j) \sin \tilde{\phi}_j & \tilde{\eta} \sin \tilde{\phi}_j + (\tilde{\xi} - \tilde{\xi}_j) \cos \tilde{\phi}_j & -1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

図1の部材端 i から部材軸に沿う距離 ξ における b 点の移動部材座標 $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$ と勾配 $\tan \tilde{\phi}$ を式(7)で表す。すなわち変形後の部材軸の曲線を三次曲線と仮定する。

$$\tilde{\xi} = a_1 \xi, \quad \tilde{\eta} = b_1 \xi + b_2 \xi^2 + b_3 \xi^3, \quad \tan \tilde{\phi} = c_1 + c_2 \xi + c_3 \xi^2 \quad (7)$$

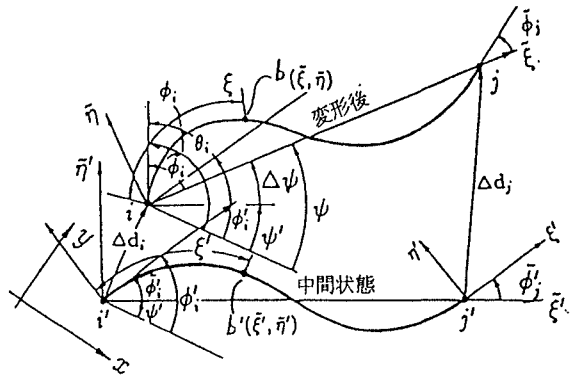


図1 骨組構造第I 曲線部材の変形

3. 有限変位解析の基礎式

有限変位仮想仕事の定理に基づいて、変形の間中間状態からの剛結骨組構造の有限変位解析の増分形基礎式は、

$$\Delta \mathbf{p} = \mathbf{K} \Delta \mathbf{d} + \mathbf{b} \quad (8)$$

のように与えられる。ここに、 $\Delta \mathbf{p}$ と $\Delta \mathbf{d}$ は変形の間中間状態から荷重と変位の増分で、

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= (\mathbf{C}' + \Delta \mathbf{C}) \mathbf{K}_m (\mathbf{C}' + \Delta \mathbf{C})^T \\ \mathbf{b} &= \Delta \mathbf{C} \mathbf{p}'_m - (\mathbf{C}' + \Delta \mathbf{C}) \mathbf{K}_m \Delta \mathbf{F}_m \mathbf{p}'_m - (\mathbf{C}' + \Delta \mathbf{C}) \mathbf{K}_m \Delta \mathbf{e}_\theta \end{aligned} \quad (9)$$

である。 $(\mathbf{C}' + \Delta \mathbf{C})$ は変形後の接続マトリックス、 $\mathbf{K}_m = \mathbf{F}_m^{-1}$ 、 $\Delta \mathbf{e}_\theta$ は有限変位に伴うひずみの補正ベクトルである。また、 $\mathbf{F}_m, \Delta \mathbf{F}_m$ は、部材剛性 EA, EI (E は弾性係数、 A は部材断面積、 I は断面二次モーメント) の逆数を対角要素とする対角マトリックスを $\mathbf{F}_e$ とすると

$$\mathbf{F}_m = \int_L \mathbf{H}_{\xi j}^T \mathbf{F}_e \mathbf{H}_{\xi j} d\xi' \quad , \quad \Delta \mathbf{F}_m = \int_L \mathbf{H}_{\xi j}^T \mathbf{F}_e (\mathbf{H}_{\xi j} - \mathbf{H}'_{\xi j}) d\xi' \quad (10)$$

である。積分は部材長 L の全体にわたって行われる。

4. 幾何剛性マトリックス

変形の間中間状態において、式(8)を変位増分 $\Delta \mathbf{d}$ で微分し、中間状態における条件を与えることによって、中間状態における接線剛性マトリックス $\mathbf{K}'_T$ を求めることができる。すなわち、

$$\delta \Delta \mathbf{p} = (\mathbf{K}'_E + \mathbf{K}'_G) \delta \Delta \mathbf{d} \equiv \mathbf{K}'_T \delta \Delta \mathbf{d} \quad (11)$$

$\mathbf{K}'_E$ と $\mathbf{K}'_G$ はそれぞれ弾性及び幾何剛性マトリックスである。添字 0 は中間状態における値とすると

$$\begin{aligned} \mathbf{K}'_E &= \mathbf{C}' \mathbf{K}_m \mathbf{C}'^T \\ \mathbf{K}'_G &= \left[\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \Delta \mathbf{d}} \right]_0 \mathbf{p}'_m - \mathbf{C}' \mathbf{K}_m \left[\frac{\partial \Delta \mathbf{F}_m}{\partial \Delta \mathbf{d}} \right]_0 \mathbf{p}'_m \quad (12) \\ \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{F}_m}{\partial \Delta \mathbf{d}} \right)_0 &= \left(\int_L \mathbf{H}_{\xi j}^T \mathbf{F}_e \frac{\partial \Delta \mathbf{H}_{\xi j}}{\partial \Delta \mathbf{d}} d\xi' \right)_0 \quad (13) \end{aligned}$$

であるから、剛結骨組構造の幾何剛性マトリックス $\mathbf{K}'_G$ は、接続マトリックス $\mathbf{C}$ と平衡マトリックスの増分 $\Delta \mathbf{H}_{\xi j}$ ($= \mathbf{H}_{\xi j} - \mathbf{H}'_{\xi j}$) の変位による微分から得られる。

5. 円弧アーチの解析例

(1) 2 ヒンジ円弧アーチ 図2に示す2 ヒンジ円弧アーチの座屈荷重解析結果を図3に示す。

ヤング率 $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ 、断面二次モーメント $I = 0.1 \text{ cm}^4$ として解析した。

曲線部材の幾何剛性マトリックスは分割数が少ないときでも理論解に近い値を示し、分割数が多くするにしたがい信用性が高くなると言える。

(2) 固定円弧アーチ 図2に示す固定円弧アーチの座屈解析を行う。

前項より、厳密解が未知の場合、分割数の増加による収束値を推定解とし得るのでこの問題の解は約 375 kgf と推測できる。

今回提案した曲線形状の平衡マトリックスを用いた場合、要素分割数が少ない場合においても正解に近い値を示すことがわかった。

参考文献

- 1) Miike, R., Kobayashi, I., Yamada, Y. "Virtual Large Displacement Theorem for Frame Structures" ASCE, 1990
- 2) 三樹祐太、三池亮次、小林一郎、橋本淳也 "形状マトリックスを用いた曲線部材骨組の幾何剛性マトリックス" 土木学会西部支部講演概要集, 1996

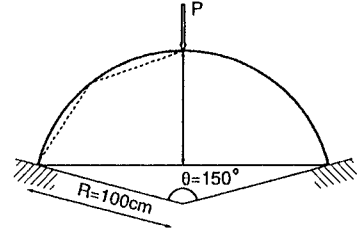


図2 円弧アーチの解析モデル

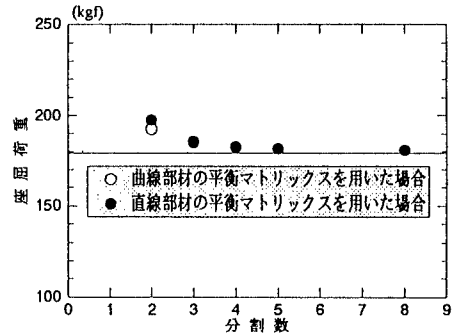


図3 2 ヒンジアーチの解析結果

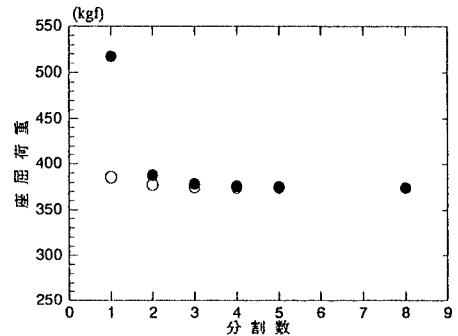


図4 固定アーチの解析結果