

最適制御理論に基づいたダムゲート操作による洪水の最適放流

中央大学 学生員 佐久間 清文
中央大学 正会員 川原 陸人

1 はじめに

近年、生態系・景観の点からダムの建設は非常に困難なものとなってきたが、言うまでもなくダムは多くの重要な役割を持ち、その例として、洪水調節、灌漑・生活用水の確保、水力発電等が挙げられる。その中でも日本のように洪水の起こりやすい国では洪水調節は特に重要である。そこで、本研究ではダムゲートで放流量を調節する事により洪水を防止する事を目的とするが、この問題を扱うにあたり次のことがらを考慮した調節をしなければならない。

… ダム貯水池内での急激な水位の上昇により、周辺地域の氾濫や越流によるダム構造物の破損・崩壊に対する検討。

… 制限流量以上の放流をすることにより、下流地域(特に居住地域)の安全をどのように守るかにについての検討。

つまり上記の問題を解決するために、上流・下流域を考慮した放流量調節を行えばよいと言える。そのための手段として有限要素法を用いて貯水池内の挙動を数値解析し、それらの値を用いて最適制御理論による最適放流量を求めることが本研究のアプローチとなるが、解析をするにあたり、洪水の挙動は2次元浅水長波方程式によって表されるものとし、制御の効果を示すとともに考察をする。また本研究で用いた最適制御理論のアルゴリズムは共役勾配法であり、これは一般に操作量(放流量)に拘束条件の内場合にのみ用いられる。そこでクリッピングオフ手法を考慮した共役勾配法により拘束条件付きの問題を扱う事になるので、クリッピングオフ手法の有効性についても検討する。

2 基礎方程式、境界条件

洪水の挙動を表す支配方程式として、2次元線形浅水長波方程式が用いられ、それらは以下の運動方程式、連続方程式で書き表される;

$$\dot{q}_i + g h \zeta_i = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (1)$$

$$\dot{\zeta} + q_i \zeta_i = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (2)$$

ここで g は単位幅流量、 ζ は水位変動量、 g は重力加速度、 h は水深を表す。境界条件は以下のように設定される。

$$q_i = \bar{q}_i \quad \text{on} \quad S_1 \quad (3)$$

$$q_i = \bar{q}_i \quad \text{on} \quad S_2 \quad (4)$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial n} = 0 \quad \text{on} \quad S_3 \quad (5)$$

ここで S_1, S_2 は流入、流出境界、 S_3 は陸境界を表す。

3 有限要素法

基礎方程式を空間方向に離散化するために、解析領域を任意の三角形有限要素に分割し、それらに対して重みつき残差方程式を導き、さらにガレルキン法によって補間すると、以下の有限要素方程式を得る;

$$[M]\{\dot{X}\} + [H]\{X\} = \{0\} \quad (6)$$

ここで $\{X\}$ は状態ベクトル $[M], [H]$ は係数行列である。ここで、 Φ は一次の形状関数。得られた有限要素方程式(8)を時間積分するために、二段階陽的解法を用いると1段階・2段階それぞれ以下のように表される。

$$\{X^{n+\frac{1}{2}}\} = [\bar{M}]^{-1} [\bar{M}]\{X^n\} - \frac{\Delta t}{2} [\bar{M}]^{-1} [H]\{X^n\} \quad (7)$$

$$\{X^{n+1}\} = [\bar{M}]^{-1} [\bar{M}]\{X^n\} - \Delta t [\bar{M}]^{-1} [H]\{X^{n+\frac{1}{2}}\} \quad (8)$$

ここで $[\bar{M}]$ は集中化質量行列、 $[\bar{M}]$ は計算を安定させるためのランピングパラメータ e を用いて表す事のできる混合質量行列である。

$$[\bar{M}] = e[\bar{M}] + (1-e)[M] \quad (9)$$

4 最適制御理論

4.1 評価関数

まず、最適制御理論を議論するために有限要素方程式(8)を以下のような状態方程式に変形する。

$$\{\dot{x}\} = [A]\{x\} + [B]\{u\} + [C]\{f\} \quad (10)$$

ここで、 $\{x\}, \{u\}, \{f\}$ はそれぞれ状態量、操作量、外力量を表す。次に求められた制御量が良いのか悪いのかを判断するために、以下のような評価関数を定義するが、評価関数は状態量と操作量の二次形式で表される。ここで、 $\{x\}, \{u\}$ はそれぞれ状態量、操作量、 Q, R は重み行列を表す。

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (\{x\}^T [Q] \{x\} + \{u\}^T [R] \{u\}) dt \quad (11)$$

次に、状態方程式、初期条件を満たす x, u のうち、この評価関数を最小にする最適軌道を求めるが、最適性の条件からラグランジュ乗数 $\{p\}$ を導入してハミルトニアンを定義する。

$$H = -\frac{1}{2} (\{x\}^T [Q] \{x\} + \{u\}^T [R] \{u\}) + \{p\}^T ([A]\{\tilde{x}\} + [B]\{u\}) \quad (12)$$

よって、オイラー方程式、停留条件を次式のように得る;

$$\{\dot{p}\} = -\frac{\partial H}{\partial \{x\}} = [Q]\{x\} - [A]^T \{p\} \quad (13)$$

$$\{p(t_f)\} = \{0\} \quad (14)$$

また、オイラー方程式(17)に対しても二段階陽的解法を用いる。

4.2 クリッピングオフ共役勾配法

共役勾配法は評価関数を最小とするためのアルゴリズムであるが、一般に操作量に拘束条件のない問題に適用されるものであり、拘束条件のある問題については何らかの工夫を施す必要がある。そこで、本研究ではクリッピングオフ手法を用いる事により、操作量に拘束条件のある問題に対しても共役勾配法を適用することを検討する。またクリッピングオフ手法をもちいる長所として、共役勾配法のアルゴリズムを少し変更するだけでよい事が挙げられる。まず、操作量の上限值、下限値を以下のように設定する;

$$u_{\min} \leq u \leq u_{\max} \quad (15)$$

そして、全制御対象時間を飽和区間 S 、不飽和区間 U に分割するが、それらは以下の条件で判別される;

$$S; u_i > u_{\max} \text{ or } u_i < u_{\min} \text{ and } u_i \cdot J_{u_i} \\ U; \text{otherwise}$$

評価関数の勾配 J_u は(16)より得られる。

$$J_u = -H_u = [R]\{u\} - [B]^T\{p\} \quad (16)$$

次に、探索方向をどのように定めるかであるが、勾配法において $J(u)$ の $u = u^{(0)}$ における降下方向に取る。それは、形式的に J の $u^{(0)}$ における勾配により、以下ようになる；

$$\{s^{(0)}\} = -J_u^{(0)} \quad (17)$$

($i \geq 1$) のときの探索方向 s_i を求めるため、 β_i を以下のよう定める；

$$\beta^{(i)} = \begin{cases} \beta_0 & (\beta_0 < \beta_m) \\ \gamma \beta_m & (\beta_0 \geq \beta_m, 0 < \gamma < 1) \\ 0 & (I_2 = 0 \text{ or } I_3 = 0) \end{cases} \quad (18)$$

ここで、各係数は以下のものであり、 γ は Quintana と Davison の定めた 0.5 を用いる；

$$\beta_0 = \frac{I_1}{I_2} \quad (I_2 \neq 0) \quad , \quad \beta_m = \frac{I_1}{I_3} \quad (I_3 \neq 0)$$

$$I_1 = \int_{U(i)} (J_u^{(i)}, J_u^{(i)}) dt \quad , \quad I_2 = \int_{U(i)} (J_u^{(i-1)}, J_u^{(i-1)}) dt \\ I_3 = \int_{U(i)} (J_u^{(i)}, s^{(i-1)}) dt$$

これより、 i 回目以降の探索方向は次のように定められる；

$$\{s^{(i)}\} = \begin{cases} -J_u^{(i)} + \beta^{(i)} \{s^{(i-1)}\} & (t \in U) \\ -J_u^{(i)} & (t \in S) \end{cases} \quad (19)$$

ステップ長さ $\alpha^{(i)}$ は放物線探索法によって求められ、その時の α を $\alpha_{min}^{(i)}$ とする。

$$J(\{u^{(i)}\} + \alpha^{(i)} \{s^{(i)}\}) \quad (20)$$

i 回目の操作量 $\{u^{(i)}\}$ は $\alpha_{min}^{(i)}$ によって更新される。

$$\{u^{(i+1)}\} = \text{sat}(\{u^{(i)}\} + \alpha_{min}^{(i)} \{s^{(i)}\}) \quad (21)$$

ここで、 $\text{sat}(x)$ は飽和関数と言われるもので、以下のように定義される。

$$\text{sat}(x) = \begin{cases} u_{max} & (x \geq u_{max}) \\ x & (u_{min} < x < u_{max}) \\ u_{min} & (x \leq u_{min}) \end{cases} \quad (22)$$

以上の手続きを評価関数が収束するまで繰り返す事により、最適操作量が求められる。

4.3 アルゴリズム

1. 飽和していない初期操作量 $\{u^{(0)}\}$, $t \in [t_0, t_f]$ を仮定する。
2. $\{x(u^{(0)})\}$, $\{p(x^{(0)})\}$, $J_u^{(0)}$ を計算する。
3. $\{s^{(0)}\}$ を計算し、 $i = 0$ とセットする。
4. $\beta^{(i)}$ ($i \geq 1$), $s^{(i)}$ を計算する。
5. $J(\{u^{(i)}\} + \alpha^{(i)} \{s^{(i)}\})$ を最小にする α_{min} を求め、 $\{u^{(i+1)}\}$ を計算する。
6. $\{x(u^{(i+1)})\}$, $\{p(x^{(i+1)})\}$, $J_u^{(i+1)}$ を計算する。
7. $e = \sum_{k=1}^n \|\{u^{(i)}(k)\} - \{u^{(i-1)}(k)\}\|$ を計算
if $e \leq \epsilon$ then
else $i = i + 1$ 5に行き計算を繰り返す。

5 数値解析例

数値解析例として栃木県にある川治ダムを用いることとするが、このダムのスケールは東西に約 2.1(km)、南北に約 2.3(km)であり、それを 241 節点、359 要素の有限要素に分割する。ここで、図 1 はダムの地形図であり、図 2 はその有限要素分割図である。Fig. 3 は流入点における単位幅流量を示し、Fig. 5 はダムゲートでの単位幅流量を表すが、ここで実線は制御された場合の流量、破線は全く制御をしなかった場合の流量を表す。また、放流量の制限値は上限、下限それぞれ 3.2, 0.5 (m**2/sec) である。Fig. 6-Fig. 8 は各ポイントでの水位変動量であり、実線、破線はそれぞれ制御した場合、制御しない場合のものを表す。

6 結論

本研究では、操作量の上限値、下限値が拘束された場合でも制御を行わない場合と比べ、貯水池内の水位変動量は十分に抑える事ができた。つまり、上流域と下流域の安全を考慮した最適制御ができた事を示している。

以上より クリッピングオフ手法を用いた共役勾配法は操作量に拘束条件のある問題に対しても適用できる事が示された。このことより、近年発達した予測レーダーを用いることによって、予め洪水流入が分かればこの手法は極めて有効なものになると思われる。

また、今回結果は間に合わなかったがある放流制限のもとで、どれだけの放流を行えば最も早い時間で洪水を制御できるかについても検討する必要がある。

参考文献

- [1] 川原睦人、吉田裕、'新体系土木工学有限要素法'、技報堂、1983
- [2] 加納秀明、'システムの最適理論と最適化'、コロナ社、1987
- [3] 加藤寛一郎、'工学的最適制御'、東京大学出版会、1988

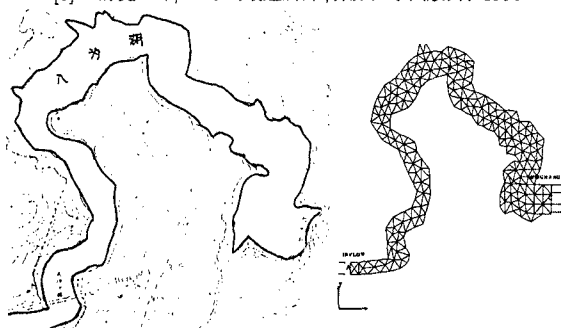


Fig.1 TOPOGRAPHICAL MAP OF KAWAJI DAM

Fig.2 F.E.M MAP OF KAWAJI DAM

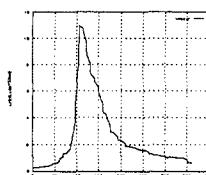


Fig.3 UNIT FLOW AT A POINT

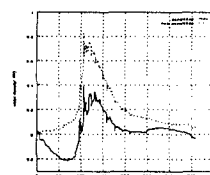


Fig.6 WATER ELEVATION AT A POINT

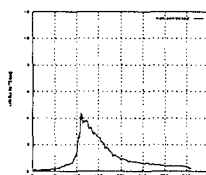


Fig.4 UNIT FLOW AT B POINT

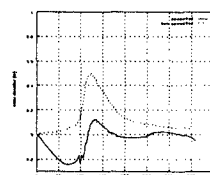


Fig.7 WATER ELEVATION AT B POINT

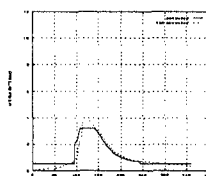


Fig.5 UNIT FLOW AT C POINT

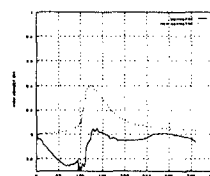


Fig.8 WATER ELEVATION AT C POINT