

I-A49 地中温度制御システム構築のための数値解析的研究

○ 中央大学大学院理工学研究科 学生員 山本 典行
中央大学理工学部土木工学科 正員 川原 睦人

1 はじめに

近年、世界各国で環境問題が重要視されてきている。我国においても、ゴルフ場での過度の農薬使用が、周辺の河川や地下水に悪影響を及ぼし、環境汚染に直接つながるとして、深刻な問題となっている。又、2002年にはサッカーのワールドカップが、日韓共同で開催されることが決定された。しかしながら、我国のサッカー場では、一年に一回芝生を張り替えるという面倒な作業を行なっている。これは、手間暇もかかり、張り替えた芝生が根づくまでの期間(約一ヵ月)競技場が使用できず、収益も減り不経済である。以上のような問題を解決するために、制御システムの構築が考えられた。そのシステムとは、地中に通水パイプを埋設し、外気温によってパイプ内に流す水の温度を調整して、地中の温度を制御するというものである。これによって、一年を通じて新鮮な芝生を維持しようというのである。そして、この制御システムを競技場に適用するために、様々な数値解析が行なわれている。そして、数値解析上問題となるのが、境界条件の処理である。実際問題を考える際、地表面の温度(外力量)というのは先の情報に依存しており、それを正確に知ることは非常に難しいとされる。また、刻一刻と変化する外力量に対して、制御量を連続的に変化させ与え続けるということも、経済性を考えれば非常に困難であろう。よって本論文では、実際の自然条件と制御装置の精度を考慮にいれ、制御システムに適用可能であると思われる数値解析手法が示されている。

2 基礎方程式

モデルの温度の計算値 $\{\theta\}$ を得るために、次に示すような非定常熱伝導方程式を適用する。

$$\rho C_p \frac{\partial \theta}{\partial t} - \beta \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) = 0 \quad \text{in } V \quad (1)$$

… 第一種境界条件(デリクレ境界条件)

$$\theta = \hat{\theta} \quad \text{on } S_1 \quad (2)$$

… 第二種境界条件(ノイマン境界条件)

$$q = \beta \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} l + \frac{\partial \theta}{\partial y} m \right) = \hat{q} \quad \text{on } S_2 \quad (3)$$

… 初期条件

$$\theta_0 = \hat{\theta}_0 \quad \text{in } V \quad (4)$$

3 有限要素法

有限要素法によって、基礎方程式を空間方向に離散化すると、次に示す有限要素方程式が得られる。

$$M\dot{\theta} + S\theta = \mathbf{o} \quad \text{in } \Omega \quad (5)$$

ここで、 M は熱容量行列、 S は熱伝導行列を表している。そして、クランク・ニコルソン法によって、有限要素方程式を時間方向に離散化すると、次の式が得られる。

$$\left(M + \frac{\Delta t}{2}S\right)\theta(k+1) = \left(M - \frac{\Delta t}{2}S\right)\theta(k) \quad (6)$$

ここで、 Δt は微小時間、 k は時間ステップを表す。次に、制御問題を解くために、次に示される状態方程式を作成しておく必要がある。

$$\begin{aligned} \theta(k+1) &= \left(M + \frac{\Delta t}{2}S\right)^{-1} \left(M - \frac{\Delta t}{2}S\right)\theta(k) \\ &= A\theta(k) + Bu(k) + Cf(k) \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、 A 、 B 、 C は、 $\left(M + \frac{\Delta t}{2}S\right)^{-1} \left(M - \frac{\Delta t}{2}S\right)$ より抜き出した行列である。また、 θ は状態量ベクトル、 u は操作量ベクトル、 f は外力量ベクトルを表している。

4 予測制御法

予測制御法により制御問題を取り扱うために、評価関数を以下のように定義する。

$$\begin{aligned} J_k &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \left(\left(\tilde{\theta}(k+i) - \theta^* \right)^T Q \left(\tilde{\theta}(k+i) - \theta^* \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(u(k+i-1) - u^* \right)^T R \left(u(k+i-1) - u^* \right) \right) \end{aligned} \quad (8)$$

ここで、 $\tilde{\theta}$ 、 θ^* は、目的点での予測状態量の計算値と状態量の設定値をそれぞれ表しており、 u 、 u^* は、操作点での操作量と操作量の理想値を表している。

予測状態量 $\tilde{\theta}$ を得るために、予測状態方程式(7)を用いることにより、次式が得られる。

$$\tilde{\theta}(k+1) = A\theta(k) + Bu(k) + C\tilde{f}(k) \quad (9)$$

ここで、 $\theta(k)$ 、 $u(k)$ は、 t_k での状態量と操作量であり、 $\tilde{f}(k)$ は、 t_k での外力の情報である。そして、この式から $\tilde{\theta}(k+2) \sim \tilde{\theta}(k+m)$ も得られる。

操作量 $u(i)$ を決めるために、次式を用いる。

$$\frac{\partial J_k}{\partial u(k)} = 0, \frac{\partial J_k}{\partial u(k+1)} = 0, \dots, \frac{\partial J_k}{\partial u(k+m-1)} = 0 \quad (10)$$

$\tilde{\theta}(k+1) \sim \tilde{\theta}(k+m)$ を式(8)に代入して、式(10)を用いて整理すると次式を得る。次式から、操作量 $u(k) \sim u(k+m-1)$ が、求められる。

$$\beta u = -\alpha \theta - \gamma \tilde{f} + \delta \theta^* + \epsilon u^* \quad (11)$$

6. Kalman Filter による状態量の予測

Kalman Filter による状態量である地表面温度の長期予測のために、以下のような状態空間モデルの基礎方程式を用いる。

$$f(k) = F(k)f(k-1) + G(k)w(k) \quad (12)$$

$$y(k) = H(k)f(k) + v(k) \quad (13)$$

状態推定問題を答えるためには、観測値 $Y(k)$ が与えられた下での状態 $f(k)$ の条件付き分布 $p(f(k)|Y(j))$ を求めればよい。状態空間モデルを表す式(12)と式(13)は線形モデルであり、 $w(k)$ と $v(k)$ と $f(0)$ は全て正規分布に従うので、これらの条件付き分布は正規分布となる。したがって、状態空間モデルの状態推定問題を考えるためには、条件付き分布を規定する平均ベクトルと分散共分散行列だけを求めればよいことになり、それは以下のように表される。

$$f(k|j) = E(f(k)|Y(j)) \quad (14)$$

$$V(k|j) = E(f(k) - f(k|j))(f(k) - f(k|j))^T \quad (15)$$

ただし、Kalman-Filter で直接取り扱うのは、 $j = k-1$ の場合(1期先予測)と $j = k$ の場合(フィルタ)である。1期先予測とフィルタを交互に繰り返すことにより、状態量を順次求めることができる。

1期先予測には、以下のような計算を行う。

$$\begin{aligned} f(k|k-1) &= F(k)f(k-1|k-1) \\ V(k|k-1) &= F(k)V(k-1|k-1)F^T(k) \\ &\quad + G(k)Q(k)G^T(k) \end{aligned} \quad (16)$$

フィルタには、以下のような計算を行う。

$$\begin{aligned} K(k) &= V(k|k-1)H^T(k) \\ &\quad \times (H(k)V(k|k-1)H^T(k) + R(k))^{-1} \\ f(k|k) &= f(k|k-1) \\ &\quad + K(k)(y(k) - H(k)f(k|k-1)) \\ V(k|k) &= (I - K(k)H(k))V(k|k-1) \end{aligned} \quad (17)$$

まず、Kalman Filter によって、 $f(k+1)$ の1期先予測の平均ベクトル $f(k+1|k)$ 及び分散共分散行列 $V(k+1|k)$ が求められる。ここで、観測値 $y(k+1)$ は得られていないことを考慮すると、形式的に $Y(k+1) = Y(k)$ が成立するものとみなし、計算を行えばよいことになる。この場合、明らかに $f(k+1|k+1) = f(k+1|k)$ 、 $V(k+1|k+1) = V(k+1|k)$ が成立する。時刻 k までの観測値 $Y(k)$ に基づいて、 $f(k+1), \dots, f(k+j)$ を長期予測には、以下のような計算を行う。

$$\begin{aligned} i &= 1, \dots, j \text{ について} \\ f(k+i|k) &= F(k+i)f(k+i-1|k) \\ V(k+i|k) &= F(k+i)V(k+i-1|k)F^T(k+i) \\ &\quad + G(k+i)Q(k+i)G^T(k+i) \end{aligned} \quad (18)$$

6 数値解析例

今回の解析では、実際に観測された外力量を用いて計算が行なわれている。図1には、Kalman-Filter による外力量予測の計算結果が示されている。この計算では、過去50stepの外力量が得られているものとして、4step先までの外力量を随時予測している。図2では、予測された外力量を下に、予測制御法を用いた制御計算結果が示されている。この場合に、実際の制御装置を考慮した On-Off 制御方式を用いている。なお、目的点での目的温度は15(deg C)に設定しており、 $\Delta t=15(\text{min})$ である。

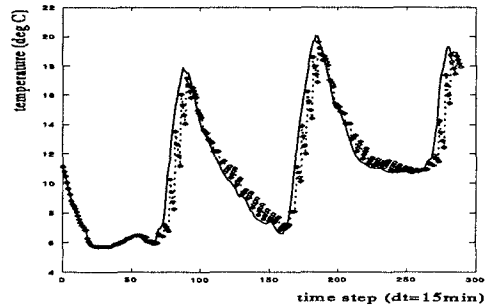


図1. 予測計算結果

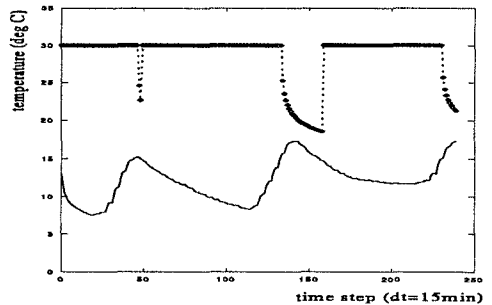


図2. 制御計算結果

7 おわりに

本論文では、実問題を考慮した数値解析手法を紹介し、その計算結果の一例を示した。計算結果から、制御ということに関してはあまり精度の良くない結果であると思われるが、現段階で制御システムに適用することを考慮すれば、非常に良い結果が得られていると思われる。したがって、この数値解析手法を導入し、制御システムの効果や問題点を実際に検証することは、非常に興味深いと思われる。

参考文献

1. 川原 睦人：有限要素法流体解析、日科技連、1985
2. 北川 源四郎：時系列解析プログラミング、岩波書店、1993
3. 島田、梅津、川原：予測制御法を用いた洪水制御解析、第5回数値流体力学シンポジウム、1991