

I - A 48

カルマンフィルタを用いた地中温度の最適推定

中央大学
中央大学学生員 須磨 桂一
正会員 川原 睦人

1 序論

我が国のような気候条件のもとで芝生の育成を行うには行き届いた管理をしなければ良好な芝生の維持は非常に難しい。また競技場など1年を通じて使用する場合、夏芝と冬芝と呼ばれる季節に応じた2種類の芝を使用しなければならない。そこで地中温度を制御することにより芝生を張り替えずに1年を通して芝生を緑で良好な状態に保つことが本研究の最終目標であり今回の報告ではこのシステムの実用化に伴い生じる問題点とその解決手法について報告する。制御をする目的点は芝生の根の部分であるため、目的点の温度が解析する上で必要となる。しかし、地上では競技が行われるので、芝生がはがされるなどの観測の妨げとなる機会が多々あるため、直接芝生の根の部分の温度を観測することは困難である。従って、観測は地上の競技に影響のない範囲で行わなければならない。得られた観測データを用いて、カルマンフィルタと有限要素法により目的点の温度を推定し、これらを地表面の境界条件とする。このような解析を行う際に確率過程に基づいたカルマンフィルタを適用することによって以下のことを考慮することができる。

- … 観測点の観測点以外の点に対する重み付け
- … 観測データに存在する器械誤差、人為的ミスによる誤差
- … 基礎方程式、離散化において生じる不確実性や不備

このようにカルマンフィルタを用いることによって観測データを有効利用した状態量を推定でき、正確な境界条件を知ることができる。

2 有限要素法

2.1 基礎方程式

2次元平面モデル解析での地盤内の温度分布を表現するために、以下のような2次元非定常熱伝導方程式として適用する。

$$\rho C_p \dot{\theta} - \beta (\theta_{,xx} + \theta_{,yy}) = Q \quad (1)$$

ここに、 ρ は密度、 C_p は比熱、 β は地盤熱伝導率、 θ は温度、 Q は内部発熱量を表す。

$$\text{Dirichlet 境界条件} \quad \theta = \bar{\theta} \quad \text{on} \quad S_1 \quad (2)$$

$$\text{Neumann 境界条件} \quad q = \bar{q} \quad \text{on} \quad S_2 \quad (3)$$

$$\text{初期条件} \quad \theta|_{t=t_0} = \bar{\theta}_0 \quad \text{in} \quad V \quad (4)$$

ここに、 S_1 は温度が規定される境界、 S_2 は温度勾配が規定される境界、 V は解析領域、 $\bar{\theta}$ は既知量を表す。

2.2 離散化

以上のような境界条件と初期条件のもとで空間方向に有限要素法で離散化された(5)のような有限要素方程式が得られる。この式を、時間方向に完全陰的解法により離散化して(6)のような方程式を導く。

$$M\dot{\theta} + S\theta = 0 \quad (5)$$

$$(M + \Delta t S)\theta(k+1) = M\theta(k) \quad (6)$$

ここに、 Δt は時間増分、 k は離散時間ステップ、 M 、 S はそれぞれ次のような熱容量行列、熱伝導行列を表す。

$$M = \int_V \rho C_p (\Phi \Phi^T) dV \quad (7)$$

$$S = \int_V \beta (\Phi_{,x} \Phi_{,x}^T + \Phi_{,y} \Phi_{,y}^T) dV \quad (8)$$

ここに、 Φ は三角形一次補間のための形状関数を表す。

3 カルマンフィルタ

3.1 支配方程式

カルマンフィルタの基礎方程式は以下の式により構成される。

$$x_{k+1} = Fx_k + Gu \quad (\text{システム方程式}) \quad (9)$$

$$y_k = Hx_k + v \quad (\text{観測方程式}) \quad (10)$$

ここで、 x は直接には観測できない状態ベクトル、 y は観測ベクトル、 F は状態量遷移行列、 G は駆動行列、 H は観測行列、 u はシステムノイズ、 v は観測ノイズである。

3.2 仮定

カルマンフィルタの理論を導く際に、次のようなことを仮定する。

(i) システムノイズ、観測ノイズはつぎのような特徴を持つものとする。ここで、 $E\{\cdot\}$ は期待値、 Q および R は、それぞれシステムノイズ、観測ノイズの分散値であり、 δ はクロネッカーのデルタである。ノイズは互いに独立な白色ノイズとし、白色ノイズとは時間的に無相関な系列であり、次のような関係がある。

$$E\{u_k\} = 0, \quad \text{cov}\{u_k, u_j\} = E\{u_k u_j^T\} = Q\delta_{kj}, \quad (11)$$

$$E\{v_k\} = 0, \quad \text{cov}\{v_k, v_j\} = E\{v_k v_j^T\} = R\delta_{kj}, \quad (12)$$

$$\text{cov}\{u_k, v_j\} = 0, \quad (13)$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (14)$$

キーワード：カルマンフィルタ、有限要素法、地中温度制御システム

中央大学大学院理工学研究科 (〒112 東京都文京区春日 1-13-27, TEL 03-3817-1814, FAX 03-3817-1803)

(ii) 最適推定値 $\hat{x}_k$ は観測値 $Y_k = (y_0, y_1, \dots, y_k)$ が与えられたときの条件付き平均値であるとする。

$$\hat{x}_k = E\{x_k | Y_k\} \quad (15)$$

この時の予測誤差共分散を P_k とすると、次のようになる。

$$P_k = \text{cov}\{x_k | Y_k\} = E\{(x_k - \hat{x}_k)(x_k - \hat{x}_k)^T\} \quad (16)$$

推定値 x_k^* は、観測値 $Y_k = (y_0, y_1, \dots, y_{k-1})$ が与えられたときの条件付き平均値であるとする。

$$x_k^* = E\{x_k | Y_{k-1}\} \quad (17)$$

この時の予測誤差共分散を Γ_k とすると、次のようになる。

$$\Gamma_k = \text{cov}\{x_k | Y_{k-1}\} = E\{(x_k - \hat{x}_k^*)(x_k - \hat{x}_k^*)^T\} \quad (18)$$

(iii) カルマンフィルタの全ての過程は、正規分布に従うものとする。

以上より推定値 x_k^* 、最適推定値 $\hat{x}_k$ と推定誤差共分散、

予測誤差共分散は以下のように表すことができる。

$$x_k^* = F \hat{x}_{k-1} \quad (19)$$

$$\hat{x}_k = x_k^* + P_k H_k R_k^{-1} (y_k - H_k x_k^*) \quad (20)$$

$$P_k = (I - K_k H_k) \Gamma_k (I - H_k K_k)^T + K_k R_k K_k^T \quad (21)$$

$$\Gamma_{k+1} = F P_k F^T + G_k Q_k G_k^T \quad (22)$$

ここで、 K はカルマンゲインと呼ばれるもので、各節点に対する観測点データの重み付けを表すものであり、以下のように示される。

$$K_k = \Gamma_k H_k^T (R_k + H_k \Gamma_k H_k^T)^{-1} \quad (23)$$

実際の計算では、(21) → (22) → (23) の順でカルマンゲインが定常状態になるまで繰り返し計算を行い、その後(20)にて状態遷移行列に有限要素法により導出された有限要素行列を用いて、状態量の推定を行う。を用いて状態量の推定を行う。

3.3 初期共分散の設定

計算上、システムノイズ Q 、観測ノイズ R の設定は非常に重要でありこのパラメーターの設定が適切でないと、カルマンゲインが発散してしまう。しかしながら、この2つパラメーター設定に関する説明は非常に困難である。この為、今回は経験上知られている図1の法則に基づき Q と R が発散しない値を設定した。

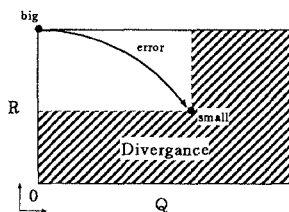


図1: Q と R の性質

4 数値解析例

4.1 概略

図2のように地中に埋設した温度センサーによって地中の各点(A～E)における温度を観測しこの観測データを用いて芝生の根の部分の温度を推定する。本手法の妥当性を検討するために今回は推定点にも温度センサーを埋設し、真値と計算結果とを比較する。

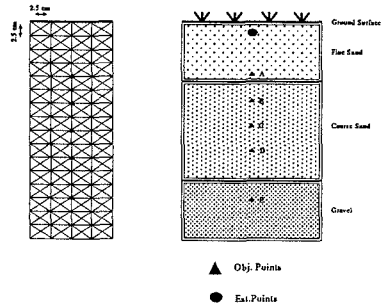


図2: 有限要素分割図

4.2 解析結果

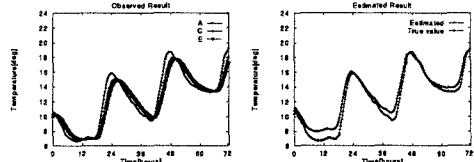


図3 観測データと地表面温度の推定結果

左図が3日間で観測された地中温度の観測データである。この観測データを用いて計算した推定結果が右図である。このように実際に観測された推定点の温度と計算結果がほぼ一致していることが確認できる。

5 考察

解析結果より本手法の妥当性が確認できた。また地中温度制御システムの実用化の際にカルマンフィルタの計算は一旦カルマンゲインの計算を行えば後は逐次的に状態量の推定を行うことができる。リアルタイムで今回のような解析を行う場合、計算効率の面から考えても本手法は十分実際のシステムに適用できると予想できる。

参考文献

- [1] 川原 陸人、吉田 裕: "新体系土木工学 (有限要素法)" 技報堂出版, 1983.
- [2] 片山 徹: "応用カルマンフィルタ" 朝倉書店, 1983.
- [3] 高木 利光、早川 豊、川原 陸人: "カルマンフィルタによる潮汐流推定" 第51回土木学会年次学術講演会講演概要集 (共通セッション), pp.52-53.
- [4] 坂本 修一: "地中温度制御システム構築のための数値解析的研究" 中央大学、修士論文, 1996.