

## I - A47

## 拡張カルマンフィルタを用いた入射波の同定

中央大学 学生員 ○西脇 康  
中央大学 正 員 川原 睦人

## 1 はじめに

実観測値は真値と雑音で構成されるので、物理現象を捉える際、実観測値をそのまま用いることはできない。従って、データを補間したり、平均をとったりする必要がある。これらの方法ではデータの値を変えてしまつて、実際のデータとは異なってしまう。そこで、雑音を含めた全てのデータを有効的に使うために、本論文は拡張カルマンフィルタを用いる。

拡張カルマンフィルタは、雑音問題を解く際によく使われる、最小乗法を用いている。一般にカルマンフィルタは線形モデルであるが、拡張カルマンフィルタの場合は非線形モデルである。本論文では、基礎方程式として浅水長波方程式を用いて、パラメータ推定として入射波の位相差、又は振幅を推定する。この位相差と振幅は一定であるので、一部の非線形項は線形項に変わる。

## 2 有限要素解析

## 2.1 浅水長波流れの基礎方程式

線形化した浅水長波方程式は、

$$\langle \text{運動方程式} \rangle \quad u_i + g\eta_i = 0 \quad (1)$$

$$\langle \text{連続の式} \rangle \quad \dot{\eta} + hu_{i,i} = 0 \quad (2)$$

ここで、 $u_i$ はそれぞれ  $x, y$  方向の流速、 $\eta$ は水位変動量を示す。 $h$ は水深、 $g$ は重力加速度である。

## 2.2 有限要素方程式

三角形要素内部を、内挿補間して重み関数には、ガレキン法を適用する事により空間方向の離散化を行う。時間方向の離散化にはこれを、陽的オイラー法を用いて有限要素方程式を作ると

$$\bar{M}u_i^{n+1} = \bar{M}u_i^n - \Delta t g H_i \eta^n \quad (3)$$

$$\bar{M}\eta^{n+1} = \bar{M}\eta^n - \Delta t h H_i u_i^n \quad (4)$$

但し、 $\bar{M} = e\bar{M} + (1-e)M$   
e: ランピングパラメータ  
となる。

## 3 拡張カルマンフィルタ

## 3.1 状態空間モデル

拡張カルマンフィルタの基礎方程式は以下に示す非線形方程式である。

$$\langle \text{システムモデル} \rangle \quad x_{n+1} = f_n(x_n) + w_n \quad (5)$$

$$\langle \text{観測モデル} \rangle \quad y_n = h_n(x_n) + v_n \quad (6)$$

ここで  $x_n$  は、状態ベクトルである。非線形項は  $f_n, h_n$  である。 $f_n$  は状態遷移行列、 $h_n$  は観測行列、 $y_n$  は観測値、 $v_n$  はシステムノイズ、 $w_n$  は観測ノイズである。

## 3.2 仮定

- i) システムノイズ、観測ノイズは、ホワイトノイズとする。  
ii) 最適推定値  $\hat{x}_n$ 、推定値  $x_n^*$  を式で表すと、

$$\hat{x}_n = E\{x_n | Y_n\}, \quad x_n^* = E\{x_n | Y_{n-1}\} \quad (7)$$

となり、一方それぞれの分散  $\Gamma$  は、

$$P_n = \text{cov}\{x_n | Y_n\} \\ = E\{(x_n - \hat{x}_n)(x_n - \hat{x}_n)^T\} \quad (8)$$

$$\Gamma_n = \text{cov}\{x_n | Y_{n-1}\} \\ = E\{(x_n - x_n^*)(x_n - x_n^*)^T\} \quad (9)$$

とする。但し  $Y_n = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  である。

## 3.3 定式化

式 (5), (6) の非線形項  $f_n(x_n), h_n(x_n)$  を推定値  $\hat{x}_n, x_n^*$  のまわりにテーラー展開すると

$$f_n(x_n) = f_n(\hat{x}_n) + F_n(x_n - \hat{x}_n) + \dots \quad (10)$$

$$h_n(x_n) = h_n(x_n^*) + H_n(x_n - x_n^*) + \dots \quad (11)$$

となる。ここで  $F_n, H_n$  は、

$$F_n = \left( \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right)_{x=\hat{x}_n}, \quad H_n = \left( \frac{\partial h_n}{\partial x_n} \right)_{x=x_n^*} \quad (12)$$

である。従って、この式 (10), (11) を 2 次の項まで考慮して、式 (5), (6) に代入すると、以下のような線形の式に、書き換えられる。

$$x_{n+1} = f_n(\hat{x}_n) + F_n x_n - F_n \hat{x}_n + w_n \quad (13)$$

$$y_n = h_n(x_n^*) + H_n x_n - H_n x_n^* + v_n \quad (14)$$

式 (13) の  $f_n(\hat{x}_n)$  と  $F_n \hat{x}_n$  は、観測値より得られ、式 (14) の  $h_n(x_n^*)$  と  $H_n x_n^*$  も、観測値より得られる。

ベイズの公式に、仮定を代入すると、

$$\langle \text{最適推定値} \rangle \quad \hat{x}_n = x_n^* + P_n H_n^T R_n^{-1} (y_n - h_n(x_n^*)) \quad (15)$$

$$\langle \text{カルマンゲイン} \rangle \quad K_n = P_n H_n^T (R_n + H_n \Gamma_n H_n^T)^{-1} \quad (16)$$

$\langle \text{推定誤差分散} \rangle$

$$P_n = (I - K_n H_n) \Gamma_n (I - H_n^T K_n^T) + K_n R_n K_n^T \quad (17)$$

が、導かれる。

この時、今回はパラメータは定値であるため、 $Q$  が 0 となる。そのため、仮定として代入する値は  $R$  のみとなり、この  $R$  の値でパラメータが決まる。

キーワード：有限要素法、拡張カルマンフィルタ、パラメータ同定  
中央大学大学院理工学研究科 (〒112 東京都文京区春日 1-13-27, TEL 03-3817-1814, FAX 03-3817-1803)

#### 4 数値解析例

今回の研究では、473節点840要素の下記(図1)の有限要素分割で、入射波の振幅及び位相の同定を行った。流入条件として、左側より正弦波を入射させる。正弦波は以下に示す通りである。

$$\eta = a \sin \left( \frac{2\pi t}{T} + k \right)$$

$$a = 1.0m, \Delta t = 0.001s, T = 2.0s, k = 1.5deg$$

この時、各々の観測地点で得られた結果に、ノイズを加えてこれを観測値(図2)とする。この観測値を用いて、入射波の位相差及び振幅を推定する。この際、ランピングパラメータは0.90とする。尚、初期条件は全節点において、流速及び、波高は0とする。

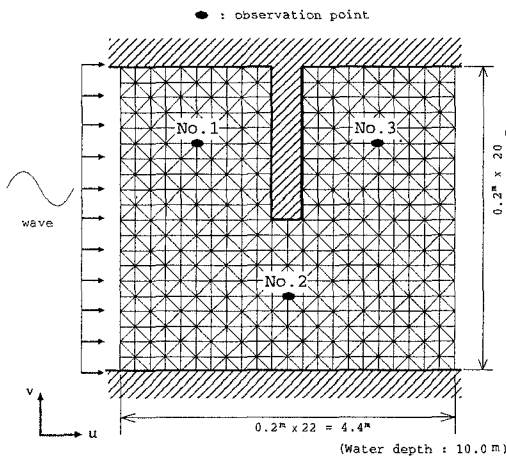


図1 有限要素分割図

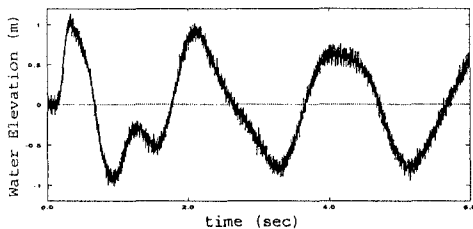


図2 No.2での観測値  $\eta$  (波高)

#### 振幅の推定

まず、一定値である入射波の振幅のパラメータ推定を行う。式(12)より、感度行列は、 $H_n = \left( \frac{\partial h_n}{\partial x_n} \right)$ であるから、

$$\bar{M} \frac{\partial u^{n+1}}{\partial a} = \bar{M} \frac{\partial u^n}{\partial a} - \Delta t g H_x \frac{\partial \eta^n}{\partial a} \quad (18)$$

$$\bar{M} \frac{\partial v^{n+1}}{\partial a} = \bar{M} \frac{\partial v^n}{\partial a} - \Delta t g H_y \frac{\partial \eta^n}{\partial a} \quad (19)$$

$$\bar{M} \frac{\partial \eta^{n+1}}{\partial a} = \bar{M} \frac{\partial \eta^n}{\partial a} - \Delta t h \left( H_x \frac{\partial u^n}{\partial a} - H_y \frac{\partial v^n}{\partial a} \right) \quad (20)$$

但し、 $\frac{\partial \eta}{\partial a} = \sin \left( \frac{2\pi t}{T} + k \right)$ と書ける。

図1における各観測地点での、振幅の推定を図3に示す。この際、様々なRの値を用いて最も良い値を検索した。

次に、観測地点をNo.2のみに設定し、入射波の振幅を1.5mと2.0mの2ケースに変えて推定する(図4)。この時使うRの値は、前回の問題においてこの地点で一番良い推定結果の値を用いる。

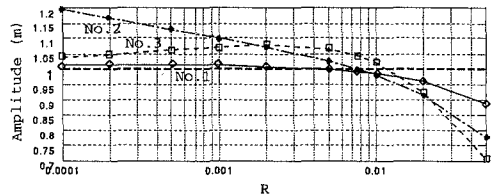


図3 観測地点ごとの振幅の推定結果

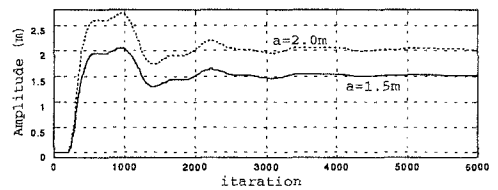


図4 振幅の推定 (1.5m, 2.0m)

#### 位相の推定

別のパラメータ推定問題として、振幅と同様に一定値である位相を推定する。ここで、感度行列は振幅の時と異なり、

$$H_n = \left( \frac{\partial h_n}{\partial k_n} \right)$$

のよう、位相で偏微分する事になる。観測地点としてNo.2で行なった結果、 $R=0.0038$ の時、入射波の位相の条件とよい一致を示した。

#### 5 考察

本手法により、観測ノイズを変える事で入射条件に一致した値を得る事ができた。図3より、観測地点ごとにそれぞれ異なるRの値で、入射波の振幅1.0mの値をとっている結果となった。このことから、観測地点の配置ごとにRの値を設定しなければならないという事がいえる。又、入射地点から遠ざかるほど、Y軸の1.0mの所を通過するグラフの勾配が大きくなる。この事は、入射地点から遠ざかるほど、Rの値に解が敏感に反応しているという事を示す。又、位相を求める時、振幅を求めたのと同じ観測地点でも、新たにRの値を設定する必要がある。

ここで問題点として挙げられる事は、それぞれのケースで最適の解を求める際、異なるRの値を設定しなければならない事である。そのため、このRの値の設定には細心の注意が必要となり、Rのメカニズム解明が必要といえる。

本論文では、人工波を送り、振幅及び位相を推定した。これらの値は予め分かっているため正しい推定ができたが、拡張カルマンフィルタを実問題に適用する際、当然その未知パラメータは分かっている。

しかし、振幅の推定の時、振幅の大きさの大小に関係なく、Rの値は同じであった。この事は、あらかじめモデルケースでパラメータを推定してRの値が決定できれば、実際の値を推定できる可能性があるといえる。

#### 【参考文献】

- 1) 川原 睦人：有限要素法流体解析，日科技連，(1983)。
- 2) 片山 徹：応用カルマンフィルタ，朝倉書店，(1983)。