

I - A46

ALE 有限要素法を用いた大振幅スロッシング解析

中央大学 学員 山本 兼哉
中央大学 正員 川原 睦人

1. はじめに

自由表面を持つ流れは、我々を取り巻く自然環境の分野では河川や海洋の流れにおいてよく見ることが出来る現象であり、また振動が引き起こす石油タンク内の液体運動(スロッシング)もこの一種である。それらのメカニズムを解明することは工学の分野において重要である。そこで本研究では、このスロッシング問題を取り上げ有限要素法に基づき数値解析を行う。通常このような問題では、ポテンシャル理論等に基づくモデルを用いての解析^[1]がコンピュータ負荷軽減のために用いられてきた。しかし、大振幅スロッシング問題において自由表面上に現れる強い非線形性や粘性効果の影響など流れ場をより忠実に把握するためには、非圧縮 Navier-Stokes 方程式の解析が最も適切であると思われる^{[2],[3]}。また、移動境界である自由表面は時々刻々と変形するため、これを安定に解くことが必要不可欠である。流れ場を表現する手法としてよく用いられる Euler 法は、初期に設定された計算メッシュを固定したまま解析は行われる。従って、移動境界を表現するにはマーカー粒子法や VOF 法^[4]などの何らかの手法を導入しなければならない。一方、Lagrange 法では節点を流体粒子とみなし流速と共に計算メッシュを移動させることで移動境界は容易に表すことが可能である。しかし、移動境界上で大きな変動が起こると節点の移動量も大きくなり計算メッシュが歪み破綻することにより計算ができなくなる場合がある。そこで本研究では、移動境界が容易に表せ、計算メッシュの歪みも調整できる両者の中間的立場をとった ALE (Arbitrary Lagrangian - Eulerian) 法を用いる。その際問題となる自由表面のスミージング手法、また連続式についての検討を行った。

2. 基礎方程式

流れ場は非圧縮性流れを仮定し、非圧縮性 Navier-Stokes 方程式の 2 次元解析を行なう。ALE 記述による非圧縮性流れの運動方程式と連続式は、次のように表記される。

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + (U_j - W_j)U_{i,j} + \frac{1}{\rho}P_{,i} - \nu U_{i,jj} = F_i \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

$$U_{i,i} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (2)$$

U_i は流速, W_i はメッシュ速度, P は圧力, ν は動粘性係数, ρ は密度, F_i は外力を表す。ALE 法では節点座標を任意に選ぶことができるため, W_i は座標 X_i の時間微分によって表される。

$$W_i = \frac{\partial X_i}{\partial t} \quad (3)$$

2. 解析手法

本研究において、計算効率と安定性に関して優れた同次補間を用いた陰的有限要素法^[5]を適用する。これは時間方向の離散化には運動方程式に Crank-Nicolson 法を適用し、連続式を完全陰的に取り扱う。空間方向の離散化には改良型 BTD 法と FS 法を組み合わせた手法である。

3. 自由表面の形状決定

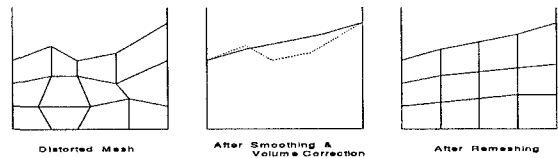


図 1: リメッシングの概略図

自由表面の移動に伴う計算メッシュの移動は、自由表面上に位置する流体粒子は常に自由表面に留まるという次式により表現できる。

$$(U_1 - W_1)n_1 + (U_2 - W_2)n_2 = 0 \quad \text{on } \Gamma_2 \quad (4)$$

n_i は自由表面の外向き単位法線ベクトルを表す。自由表面上のメッシュ速度の水平速度成分は、加振される容器の水平速度 $\hat{U}_1$ と等しいとすると、鉛直速度成分は式(4)より

$$W_2 = U_2 + (U_1 - W_1)\frac{n_1}{n_2} \quad \text{但し } W_1 = \hat{U}_1 \quad (5)$$

を満たさなければならない。式(5)を時間積分することにより、時刻 t から次の時刻 $t + \Delta t$ への移動量が求まる。

スムージング

式(5)を繰り返し計算することにより、移動境界である自由表面上の形状に著しい凹凸が生じることがある。これは数値計算を不安定に導く原因となり、計算が続行できなくなることがしばしば起こる。そこでこの凹凸をスムージングを施すことにより、この不安定要素を解消する。スムージングに関する式はいくつか提案されているが、これらは問題によりその効果が十分に発揮されない場合や過度に働くことによる弊害、また実行回数も数ステップに 1 回など全ての問題に対応できないものが多い。そこで、本研究では Taylor 展開により導かれる次式によりスムージングを行う。

(1 次精度)

$$X_{2(j)}^* = X_{2(j)} + \frac{\alpha}{2}(X_{2(j-1)} - 2X_{2(j)} + X_{2(j+1)}) \quad (6)$$

ALE 有限要素法, スムージング

中央大学大学院理工学研究科 (〒112 東京都文京区春日 1-13-27, TEL:03-3817-1814, FAX:03-3817-1803)

(3次精度)

$$X_{2(j)}^s = X_{2(j)} + \frac{\alpha}{6}(-X_{2(j-2)} + 4X_{2(j-1)} - 6X_{2(j)} + 4X_{2(j+1)} - X_{2(j+2)}) \quad (7)$$

α は $0 \leq \alpha \leq 1$ で定義され平滑化の程度を定めるパラメータであり、 $\alpha = 0$ はスムージングをしないことを意味する。ここで3次精度の α を $\frac{18}{35}$ とすれば文献[6]の、また $\frac{3}{8}$ とすれば文献[7]で用いている式となる。問題に応じ最適な値を設定することにより、計算は安定しかつ適切な解を得ることができる。

体積誤差補正

計算を繰り返すことにより、全体の流体体積に微小の誤差が生じる。これは、長時間の解析しようとする場合にこの誤差が蓄積され期待する解が得られなかったり、これが原因で計算が不安定になる影響がある。そこで、スムージングを施した後にその体積誤差を補正すべきであると考え。本研究で用いる体積誤差補正は、スムージング後の体積誤差を計算し、それに相当する平均的な水深を水面全体に付加することで初期の体積を常に保つという考えに基づくものである。従って最終的な自由表面の位置 $X_{2(j)}^A$ は、スムージング後の水深 $X_{2(j)}^s$ に平均体積補正水深 ΔX_2 を考慮した次式により決定する。

$$X_{2(j)}^A = X_{2(j)}^s + \Delta X_2 \quad \text{on } \Gamma_2 \quad (8)$$

自由表面の位置を決めた後、節点間隔が均等になるように解析領域全体の節点の再配置を行う。

5. 解析条件

本手法の有効性を検証するために、長方形容器でのスロッシング実験と数値解析との比較を示す。容器のサイズは、幅100cm、奥行き10cm、平均水深50cmでありこれを総節点数533、総要素数960に有限要素分割を行う。各物性値は、密度 $\rho = 1.0\text{g/cm}^3$ 、動粘性係数 $\nu = 0.01\text{cm}^2/\text{sec}$ 、また時間増分量 $\Delta t = 0.01\text{sec}$ とした。速度の外部境界条件即ちタンクを揺らす速度は、タンク内の流体が共振する余弦波（周期 $T = 1.32\text{sec}$ ）である。また今回は1次精度である式(5)を用いスムージングを行い、その際の α を0.12に設定した。

6. 解析結果

図-2は、タンク左壁面におけるかけ上がり高さを示しており、実験値と数値計算とが良く一致していることが分かる。また図-3は平均体積補正水深量であり、微小ではあるが振幅が大きくなるにつれかけ上がりピーク時において体積誤差補正が効いているのが分かる。図-4(a)において自由表面上に凹凸が現れているが、(b)は滑らかであり解析するにふさわしい領域が形成されている。

7. おわりに

本研究では、大振幅スロッシング問題を取り上げそれを有限要素法に基づく数値解析を行った。移動境界問題を扱うとき最も問題となるのは、移動境界上に凹凸が発生し計算が不安定になる点である。この不安定要素を解消するために自由表面上の凹凸にスムージングを施した。スムージングに導入したパラメータ α は、問題により任意に与えることができこの種の問題を解く上で非常に有効であると考

えられる。その際に、増加又は減少する流体体積を補正することにより更なる安定性と解の精度を向上させることができる。このリメッシング手法を毎回計算に取り込むことにより、数値解析結果と実験値は極めて近い値を得ることができた。また長時間の安定した計算も可能となり、今後3次元計算を行う上でも非常に有効な手法であると考えられる。

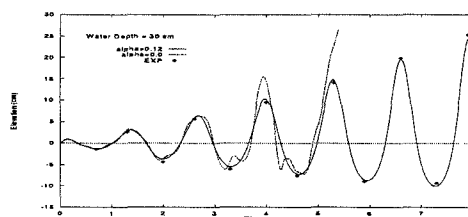


図 2: タンク左壁面におけるかけ上がり高さ

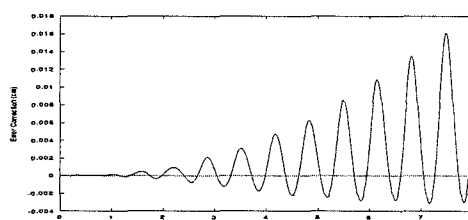


図 3: 平均体積補正水深量

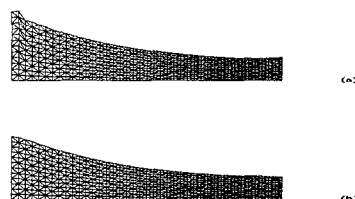


図 4: 有限要素メッシュ

参考文献

- [1] 例えば、若原、大山、藤井、'液面動揺の非圧縮線形性を考慮した TLD-構造系の風応答解析'、日本建築学会構造系論文報告集、1991
- [2] 林 正宏、'分離型法を用いた非圧縮性流れの有限要素法解析に関する基礎的研究'、修士論文、1990
- [3] 岡本、任意ラグランジュ・オイラー 有限要素法による大振幅スロッシング解析に関する研究、中央大学学位論文、1992
- [4] 米山、'液面の大変形を伴う 3 次元流動解析手法の開発'、第 10 回数値流体シンポジウム、pp.398-395、1996
- [5] 丸岡、太田、平野、川原、'同時補間を用いた陰的有限要素法による非圧縮粘性流れの解析'、構造工学論文集、Vol.43A、pp.383-394、1997
- [6] Savitzky, A. and Golay, M.J.E., 'Smoothing and differentiation of data by simplified least squares procedures', Anal. Chem., 36, pp.1627-1639, 1964
- [7] Longuet-Higgins, M.S. and Cokelet, E.D., 'The Deformation of steep surface wave on water I. A numerical method of computation' Proc. R. Soc. London A, 350, pp.1-26, 1976