

I - A45

一次元半無限領域における非定常問題の近似解法

首都高速道路公団 正 員 石田 高啓
 北海道大学工学部 正 員 三上 隆
 北海道開発庁工務部 正 員 岡田 正之
 北海道大学工学部 正 員 荻澤 憲吉

1. はじめに

半無限問題は、多くの問題に現れる。無限領域の問題の解法は大別して2つの方法が考えられる。第1の方法は外部境界を遠くであるか有限の距離に固定し、その境界までの領域だけを離散化するものである。この方法は、多数の離散点が必要であり、また十分遠い所としてどの程度の距離の所を選べばよいかという問題も生じるが、実際の解法としてよく用いられる。第2の方法は、直接的に無限に広がる領域を扱うものである。ここでは、後者の方法を取りあげ、無限領域を写像により有限領域に移す方法の適用可能性を定常問題、非定常問題の解析を通して検討する。

2. 解析方法

2.1. 写像について

本研究では、位置に関する独立変数を写像 ξ により有限領域に変換することにし、次のような場合を考慮する。

(a) Case1: 無限領域 $x=[0, \infty]$ を有限領域 $\xi=[0, 1]$ に変換する。

$$\text{代数写像: } \xi = \frac{x}{x+L} \cdots \cdots (1.a)$$

$$\text{指数写像: } \xi = 1 - \exp\left(-\frac{x}{L}\right) \cdots \cdots (1.b)$$

(b) Case2: 無限領域 $r=[R_0, \infty]$ (ただし、 $R_0 \neq 0$) を有限領域 $\xi=[0, 1]$ に変換する。

$$\text{代数写像: } \xi = \frac{r-R_0}{r+L} \cdots \cdots (2.a)$$

$$\text{指数写像: } \xi = 1 - \exp\left(-\frac{r-R_0}{L}\right) \cdots \cdots (2.b)$$

ここで、式(1)、(2)に現れる L は、 $\xi=1$ への収束の度合いを表す尺度であり、式(1)の場合を図-1に示す。この図より、 L の値が小さいほど $\xi=1$ への収束が早く、また L を固定すれば、指数写像が代数写像よりも $\xi=1$ への収束が早いことが分かる。

2.2. 解法手順の概略

Step1: 考察している問題の(偏)微分方程式と境界条件の位置に関する独立変数を、式(1)または式(2)を用いて有限変域 $\xi=[0, 1]$ に変換する。

Step2: Step1 で得られた諸式に対して、空間変数 ξ とは Legendre 多項式の零点を選点とする選点法²⁾により、時間変数 t は時間積分法により離散化し、マトリックス代数方程式に帰着させる。

3. 数値解析例

3.1. 定常問題

微分方程式及び境界条件が以下のような問題を解析する。

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = A^2 u \cdots \cdots (3)$$

$x=0$ で $u=u_0$, $x=\infty$ で $u=0$ (ただし、 A は定数)

この問題の厳密解は式(4)である。

$$u=u_0 \exp(-Ax) \cdots \cdots (4)$$

選点数 $M=11$ による結果を図-2a と図-2b に示す。縦軸が温度 u を u_0 で無次元化したもの、横軸が写像変換後の ξ である。図-2a は代数写像の場合であるが、 A 及び L の値によらず、近似解は厳密解に良く一致している。図-2b は指数写像による場合であるが、近似解の精度は AL の値(A と L の積)の大小に依存し、 $AL \geq 1$ では精度が良く、 $AL < 1$ では精度が悪いことが分かる。これは写像の方法により、解の性質が変化することによる。例えば指数写像の場合、式(1.b)を用いて u 及び $du/d\xi$ を求めれば以下になる。

$$u(\xi) = u_0 (1-\xi)^{AL}$$

$$\frac{du(\xi)}{d\xi} = -AL(1-\xi)^{AL-1} \cdots \cdots (5)$$

式(5)で $\xi \rightarrow 1$ の極限値をとれば、

$$AL \geq 1 \text{ では、} u \rightarrow 0 \quad du/d\xi \rightarrow 0$$

$$AL < 1 \text{ では、} u \rightarrow 0 \quad du/d\xi \rightarrow \infty$$

同様なことを代数写像に行えば AL の値によらず

$$\xi \rightarrow 1 \text{ で } u \rightarrow 0, \quad du/d\xi \rightarrow 0 \text{ となる。}$$

3.2. 非定常問題

初期温度0度の半無限体において、時間 $t > 0$ で表面温度が u_0 に保たれるものとし、その温度分布を求める場合を考えてみる。基礎方程式は式(6)のようになる。

Keyword: 半無限問題、代数写像、指数写像、近似解

〒001 札幌市北区北13条西8丁目 TEL 011-706-6174 FAX 011-726-2296

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \dots (6)$$

$$u(x=0)=u_0, u(x \rightarrow \infty)=0,$$

$$u(t=0)=0 \quad \text{ここで、}$$

$$a=k/(\rho \cdot c)=\text{熱伝導率/熱容量}$$

この問題の厳密解は式(7)である。

$$u(x, t) = u_0 \left\{ 1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{at}} \right) \right\} \dots (7)$$

ただし、 $\operatorname{erf}(z)$ はガウスの誤差関数で

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-\xi^2) d\xi$$

である。

時間の変数の離散化には、Crank-Nicolson 法を採用

し、無次元化時間刻み幅 $\Delta \tau = 0.01$

($\tau = at/L_0^2$, L_0 =基準長)による種々の時刻 τ における温度分布 u を図-3a、図-3b、図-4 に示す。縦軸は初期温度 u_0 で無次元化した温度である。図-3a は代数写像($L=1$)の結果であるが、任意の時刻 τ に対して近似解は良好な結果を与えている。図-3b、図-4 は指数写像の結果であるが、解の精度は τ と L の値に大きく影響することが理解できる。これは、定常問題と同様に写像の結果により解の性質が変化することによる。

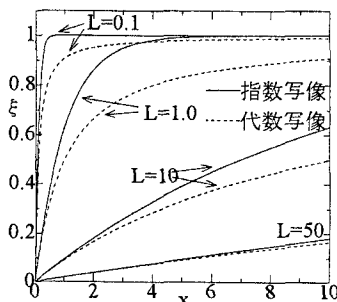


図1 xと ξ の関係

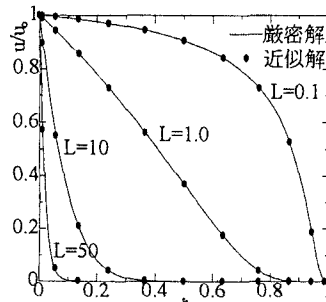


図2a Lの解に与える影響(代数写像A=1)

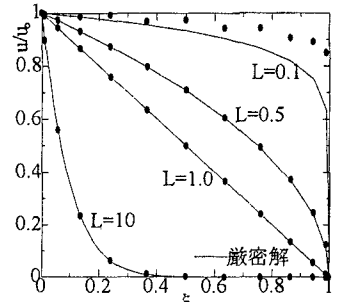


図2b Lの解に与える影響(指数写像A=1)

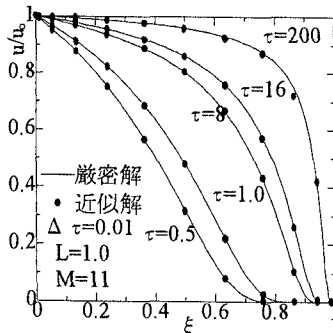


図3a 任意の時刻における解の分布
(代数写像)

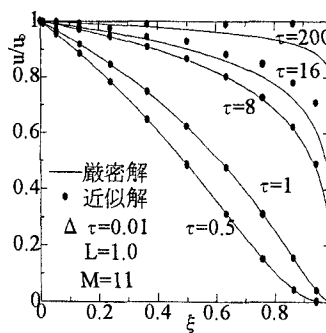


図3b 任意の時刻における解の分布
(指数写像)

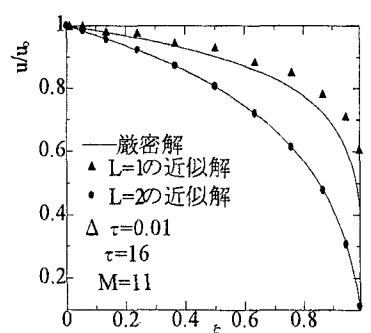


図4 Lの解に与える影響(指数写像)

4. まとめ

本研究は、写像を用いた近似解法の適用性を検討したものであり、得られた結果は以下となる。

- ①半無限問題に対して代数写像及び指数写像は有効である。
- ②代数写像による近似解は、収束の度合いを表す尺度 L によらず良好な結果を与える。
- ③指数写像による近似解は、解の精度は L の値に大きく依存するが、 L を適切に与えれば良好な結果を与える。

なお、他の数値例は当日発表の予定。

<参考文献>

1)C. Canuto, et al.: Spectral Methods in Fluid Dynamics, Springer-Verlag, 1986.

2)T. Mikami and Jin Yoshimura: Collocation Method for Determining the Natural Vibration Characteristics of Cylindrical Shell with either Internal or External Fluids, Proc. of JSCE, No.422/I-14, pp.215s-225s, 1990