

I - A40

安定化Space-Time有限要素法による浅水長波流れ解析

中央大学 正員 〇樫山 和男
 中央大学 学生員 菅野 諭
 ミネソタ大学 Marek Behr
 ミネソタ大学 Tayfun Tezduyar

1. はじめに

これまで提案された浅水長波流れの有限要素解析法の多くは、時間方向の離散化に陽的差分法、また、安定化の方法としては、等方性の人工粘性を付加する方法が用いられていた¹⁾。従って、必要とする計算機容量が少なく済むという長所の反面、CFL安定条件の制約により微小時間増分量が大きく取れず、また付加する人工粘性パラメータにより解が大きく左右されるという問題点が指摘されていた。

そこで本報告は、移動境界問題に対して特に取り扱いが容易な、時空間両方について積分を行う陰的な安定化Space-Time有限要素法^{2),3)}を浅水長波流れ解析に適用することを試みた。そして、その精度と安定性について従来の代表的な陽的有限要素法との比較のもとに検討した。なお、安定化の方法としてはSUPG/PSPG法³⁾を用いている。

2. 基礎方程式

基礎方程式として、次の保存型の浅水長波方程式を用いる。

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} = \mathbf{R} \quad \text{in } \Omega_t \quad (1)$$

ここに、 $\mathbf{U}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{A}_i$ は以下になる。

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} H \\ U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \\ Hu \\ Hv \end{bmatrix}, \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ gH \frac{\partial h}{\partial x_1} \\ gH \frac{\partial h}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c^2 - u^2 & 2u & 0 \\ -uv & v & u \end{bmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -uv & v & u \\ c^2 - v^2 & 0 & 2v \end{bmatrix}$$

ここに、 u, v はそれぞれ x_1, x_2 方向の流速成分、 ζ は水位上昇量、 c は波速、 H は全水深 ($= h + \zeta$)、 g は重力加速度、 h は初期水深を表す。

また、境界条件および初期条件は次式により与えられる。

$$\mathbf{U} = \hat{\mathbf{U}} \quad \text{on } \Gamma_t \quad (2)$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 \quad \text{on } \Omega_0 \quad (3)$$

3. Space-Time有限要素法

時空間の離散化に対して安定化Space-Time有限要素法^{2),3)}を用いる。基礎方程式に対する重み付き残差表現は、次式ようになる。

$$\begin{aligned} & \int_{Q_n} \mathbf{U}^* \cdot \left(\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} \right) dQ \\ & + \int_{\Omega_n} (\mathbf{U}^*)_n^+ \cdot ((\mathbf{U})_n^+ - (\mathbf{U})_n^-) d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{(n_{el})_n} \int_{Q_n^e} \tau (\mathbf{A}_k)^T \left(\frac{\partial \mathbf{U}^*}{\partial x_k} \right) \cdot \left[\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} \right] dQ \\ & + \sum_{e=1}^{(n_{el})_n} \int_{Q_n^e} \delta \left(\frac{\partial \mathbf{U}^*}{\partial x_i} \right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} \right) dQ \\ & = \int_{Q_n} \mathbf{U}^* \cdot \mathbf{R} dQ \end{aligned} \quad (4)$$

ここに、 $\mathbf{U}^*$ は重み関数であり、また、 e は要素を表している。また、上式の左辺第1項および右辺項は通常の Galerkin 項、左辺第2項は時刻レベル $t = t_n$ における解の連続条件項、第3項はSUPG項、第4項はPSPG項となっている。右辺の第3項と第4項が安定化に寄与する項であり、 τ はSUPGパラメーター、 δ はPSPGパラメーターである。それらの値は文献3)に従った。

図-1に1次元問題の場合の時空間領域を示す(この場合には移動境界問題として示している)。図中、 Q_n は(4)式における積分領域である時空間スラブを表しており、鉛直時間境界 P_n と水平空間境界 Ω_n で囲まれている。なお、時空間積分は、次のように表される。

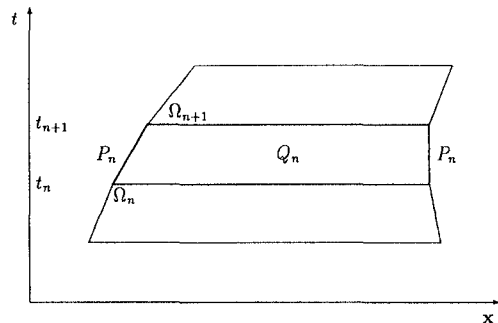


図-1 Space-Time 領域

KeyWords : Space - Time Finite Element Method, shallow water flow, stabilized method

〒112 東京都文京区春日 1-13-27

Tel:03-3817-1808, Fax:03-3817-1803

$$\int_{Q_n} \dots dQ = \int_{I_n} \int_{Q_t^h} \dots d\Omega dt \quad (5)$$

ここに、 $I_n = (t_n, t_{n+1})$ である。また、 $(\dots)_n^+$ と $(\dots)_n^-$ は、時刻レベル $t = t_n$ の境界における上側値と下側値を表しており、次式で定義される。

$$(U^h)_n^\pm = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} U(t_n \pm \varepsilon) \quad (6)$$

また、初期条件は次式により導入される。

$$(U^h)_0^- = U_0 \quad (7)$$

図-1に示す時空間スラブに対して要素分割を行い、離散化すると最終的に次式に示す非線型方程式が得られる。なお、要素としては、空間方向に3角形（時空間を3角柱）の要素を用い、時空間ともに線形の補間関数を用いた。

$$N(d_n) = F \quad (8)$$

ここに、 d_n は未知ベクトルであり、次のNewton-Rapson法により求めている。

$$\left. \frac{\partial N}{\partial d} \right|_{d_n^k} (\Delta d_n^k) = F - N(d_n^k) \quad (9)$$

すなわち、

$$A_n^k x_n^k = R_n^k \quad (10)$$

ここに、 A_n はJacobianオペレータ、 x_n は未知量ベクトルの増分、 R_n は残差ベクトルである。なお、(9)式の求解には前処理付きGMRES法⁴⁾を用いた。

4. 数値解析例

本手法の有効性を検討するために、図-2に示す一様斜面上に孤立波が遡上する問題に対して、従来の代表的な手法である陽的オイラー有限要素法と比較計算を行った。なお、初期条件等は図-2中に示している。

解析には岸沖方向に40分割したメッシュAと80分割したメッシュBの2種類のメッシュを用いた。図-3に、初期条件から出発して25秒後までの結果を5秒毎に表示した計算結果を示す。図中、太線が本手法による計算結果であり、細線が従来のランピングパラメータ ($e=0.95$) を用いた陽的オイラー有限要素法による計算結果である。なお、用いた微小時間増分量は、本手法の場合には $t=1.0$ 秒、陽的オイラー法の場合にはCFL安定条件よりメッシュAの場合が $t=0.1$ 秒、メッシュBの場合が $t=0.05$ 秒を用いた。図より、本手法では陽解法と比較して10倍から20倍の微小時間を用いているが、解及び位相がメッシュに大きく依存することなく非線型波動の特徴が表現された結果が得られている。一方、ランピングパラメータを用いた陽的オイラー有限要素法の場合には、解及び位相がメッシュに大きく依存していることが分かる。

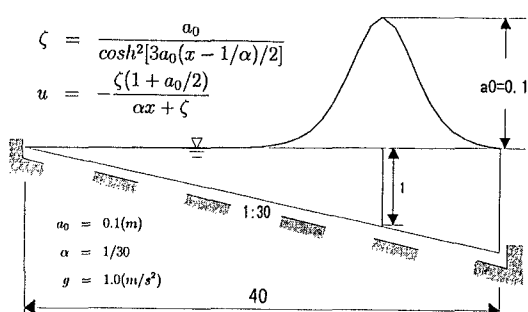


図-2 浅水変形問題

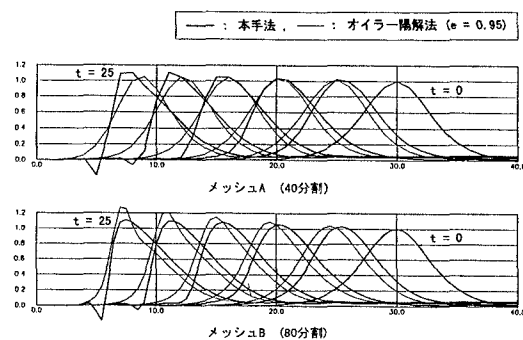


図-3 計算結果の比較

5. おわりに

本報告において、陰的安定化Space-Time有限要素法を浅水長波流れ解析に適用し、その精度と安定性について検討を行った。その結果、本手法は、従来の代表的な手法である陽的オイラー有限要素法と比較して精度と安定性に優れており、また、解及び位相のメッシュおよびパラメーターに対する依存性も少ないことが明らかとなった。

今後は、本手法をSpace-Time有限要素法の長所である移動境界問題に適用する所存である。

参考文献

- 1) Kashiwara, K., Ito, H., Behr, M. and Tezduyar, T.: Three-step explicit finite element computation of shallow water flows on a massively parallel computer, *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol. 21, pp. 885-900, 1995
- 2) Hughes, T.J.R. and Hulbert, G.M.: Space-time finite element methods for elastodynamics: Formulations and error estimates, *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 66, pp. 339-363, 1988
- 3) Behr, M. and Tezduyar, T.: Finite element solution strategies for large-scale flow simulations, *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 112, pp. 3-24, 1994
- 4) Saad, Y.: A flexible inner-outer preconditioned GMRES algorithm, *SIAM J. Sci. Comput.* Vol. 14, pp. 461-469, 1993