Ｉ－Ａ39　エレメントフリーガラーキン法による梁の縦固有振動解析

北海道大学工学部　学生員　佐藤　太裕
北海道大学工学部　正　員　三上　　隆
北海学園大学工学部　正　員　佐々木康彦

１．はじめに

エレメントフリーガラーキン法（Element Free Galerkin Method, 以下ＥＦＧM）は、有限要素法（ＦＥＭ）で行われる「要素分割」を必要とせずに偏微分方程式の近似解を求める手法として近年提案されたものである。この手法では関数を要素ごとに近似するのではなく、移動最小二乗法（Moving Least-Squares Method,以下ＭＬＳＭ）を用いて局所的に決定する。このことにより、単に解析のために要素分割を必要としないだけではなく、解析領域の任意点における関数値や空間微分値を滑らかに近似できるなど、ＦＥＭに比べ有利な点が多い。本論文では、ＥＦＧMを片持ち梁の縦固有振動問題に適用し、主に節点数により固有振動数や固有振動波形がどのように厳密解に収束していくかをを検討する。

２．計算方法

（１）ＭＬＳMによる関数近似

１次元問題について、解析領域内部の任意の評価点ｘにおける内挿関数は、その評価点の近傍にある節点値により次のように表される。

$$\phi^h(x) = \{p(x)\}^T [A(x)]^{-1} [B(x)] \{\phi\}$$

ここで、

$$p(x) = \{1, x\}$$

$$A(x) = \sum_{i=1}^{n} w(x - x_i) p(x_i) p^T(x_i)$$

$$B(x) = [w(x - x_1) p(x_1), \ldots, w(x - x_i) p(x_i)]$$

$$\{\phi\}^T = \{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n\}$$

n：評価点xの近傍に存在する節点数

x_i：i番目の節点

$w(x - x_i)$：重み関数

である。

本論文では、代表的な重み関数として以下のものを用いる。

$$w_i(x) = 1.0 - 6.0\left(\frac{x - x_i}{d}\right)^2 + 8.0\left(\frac{x - x_i}{d}\right)^3 + 3.0\left(\frac{x - x_i}{d}\right)^4$$

d：サポート半径$(> |x - x_i|)$

重み関数は、サポート半径と、評価点－節点間距離によって決まり、その選択はＭＬＳMにおいて非常に重要である。

（２）ＥＦＧMによる解析手法

解析領域は節点とは無関係にバックグラウンドセルにより分割される。セルは剛性方程式を積分する単位であり、各セルの積分にはガウス関数が用いられる。ＭＬＳMにより各ガウス積分点での内挿関数を求め、それらを重ね合わせ節点値に関して離散化することにより、剛性マトリックスや質量マトリックスができる。

３．固有振動数の計算

まず、片持ち梁の縦振動における固有振動数ωをＥＦＧMにより作成した剛性マトリックス［K］、質量マトリックス［M］を用いて求める。基本境界条件

キーワード：エレメントフリーガラーキン法、移動最小二乗法、縦振動
〒００１　札幌市北区北13条西８丁目　TEL：(011)706-6174
FAX：(011)726-2296

を与えるためにペナルティー関数法を用いると、積分方程式は以下のように表される。

$$\int_0^L \left(\frac{d^2\phi}{dx^2} - \omega^2\phi\right)W(x)dx + \frac{d\phi(L)}{dx}w(L) + \alpha\phi(0)W(0) = 0$$

ここで、セル数を６、α=10000000とし、節点数を変化させ（節点は梁上に規則的に配置）、各節点数に対応したサポート半径を用いて上式を節点値に関し離散化し、以下の式を満たすωを求める。

$$\det\left|[K] - \omega^2[M]\right| = 0$$

このωに対する厳密解、ＥＦＧＭによる計算結果の節点数の違いによる比較を１～３次について表－１に示す。

表－１　固有振動数ωの値の比較

振動の次数	１次	２次	３次
厳密解	$\frac{\pi}{2}=1.571$	$\frac{3\pi}{2}=4.712$	$\frac{5\pi}{2}=7.854$
節点数４	1.589	5.062	8.949
節点数５	1.580	4.848	8.373
節点数７	1.582	4.783	8.123
節点数９	1.580	4.769	8.033

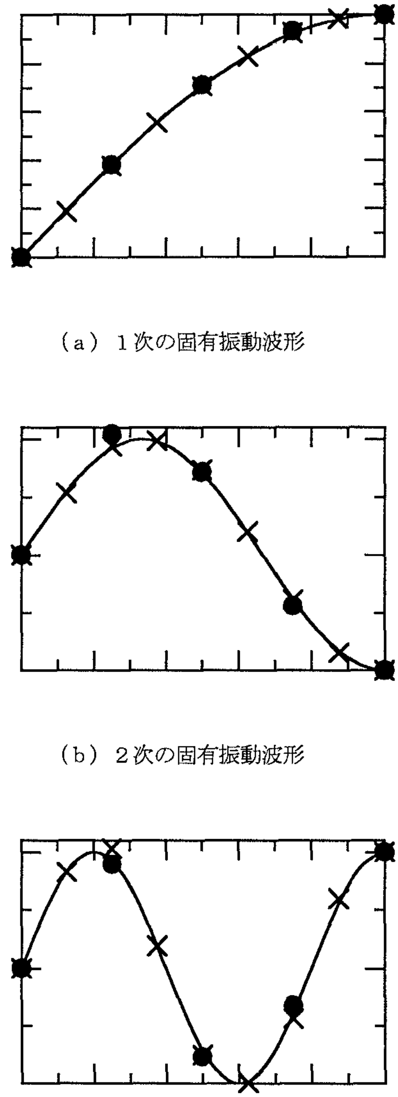
これより、節点数の増加に伴い数値解は厳密解に収束していくことがわかる。特に高次になるにつれてその傾向が顕著に現れている。

４．固有振動波形の計算

次に１～３次の固有振動波形を図－１（ａ）～（ｃ）に示す。これより、節点数が多い場合（×：節点数９）の方がわずかに厳密解に近い波形が求められるものの、節点数が少ない場合（●：節点数５）との差はほとんどなく、どちらの場合においても十分良好な解が得られることがわかった。

５．まとめ

ＥＦＧＭがＦＥＭと同様に固有値問題にも適用可能であることを示した。今後は更にもう少し複雑な構造物への適用を試みこの手法の可能性について検討していく予定である。



（ａ）１次の固有振動波形

（ｂ）２次の固有振動波形

（ｃ）３次の固有振動波形

図－１　固有振動波形

（●：節点数５、×：節点数９、実線：厳密解）

【参考文献】

１）奥田洋司、長嶋利夫、矢川元基：エレメントフリーガラーキン法に関する基礎的検討、日本機械学会論文集（A編）、Vol.61、pp.194-200、1995