

I - A37

Taylor 展開に基づく Element Free Galerkin Method

群馬工業高等専門学校 正会員 末武義崇

1. まえがき

近年、有限要素法や差分法などに代わる偏微分方程式の新しい数値解析手法として、“Element Free Galerkin Method (EFGM)” と呼ばれる、要素分割を必要としない手法が考案されている。EFGM は、Nayroles ら [1] によって提案された手法を、Belytshko ら [2] [3] が改良し再提案したものであり、通常、Lancaster [4] らが分布データの曲線近似に適用した移動最小二乗法 (MLSM) に従って離散化を行う数値解法である。井浦ら [5] は、こうした MLSM に基づく EFGM を種々の境界値問題の解析に適用し、基本境界条件の処理に関する定量的な検討を行っている。

本研究は、MLSM の手続きに従うのではなく、Liszka ら [6] と同様に、Taylor 展開に基づくより単純かつ直接的な EFGM の構築について検討するものである。具体例として、梁の大たわみ問題を取り上げ、提案した手法による近似解と厳密解との比較を通じ、本解法の有用性を示す。

2. Taylor 展開に基づく離散化

要素分割が不要な離散化手法を構築するためには、任意の評価点における関数値およびその微分値と、各節点値とを直接的に結びつける手続きが必要となる。Taylor 展開を用いれば、評価点の値と節点値とを関係付ける比較的単純な方法を構築することができる。

今、評価点 $x = \xi$ を中心とする半径 ρ のサポート領域 Ω (図 1) を考え、評価点近傍の近似関数 $f(x)$ を、次式の有限 Taylor 級数で表す。

$$f(x) = \sum_{j=0}^N \frac{f^{(j)}(\xi)}{j!} (x - \xi)^j \quad (1)$$

サポート領域 Ω 内部の $N+1$ 個の節点値と、評価点における近似解とを結びつけるために、各節点 $x = x_i$ ($i = 1 \sim N+1$) $\in \Omega$ における近似関数値 $f(x_i)$ が、それぞれの節点値 f_i に一致するとすれば、次の関係式が得られる。

$$\mathbf{A}(\xi) \mathbf{F}(\xi) = \mathbf{f} \quad (2)$$

ここに、 $\mathbf{F}(\xi)$ および $\mathbf{f}$ は、それぞれ評価点における微係数および節点値のベクトルである。式 (2) の逆関係式を求めれば、評価点 $x = \xi$ における解およびその微係数の近似値を、近傍の節点値から求めることができる。すなわち次式である。

$$\mathbf{F}(\xi) = \mathbf{B}(\xi) \mathbf{f} ; \quad \mathbf{B}(\xi) \equiv \mathbf{A}(\xi)^{-1} \quad \text{or} \quad f^{(j)}(\xi) = \mathbf{B}_j(\xi)^T \mathbf{f} \quad (3)$$

ただし、 $\mathbf{B}_j(\xi)^T$ は式 (3) の係数マトリックス $\mathbf{B}(\xi)$ の第 $(j+1)$ 行ベクトルである。

変分原理に基づく定式化において、対象とする領域内の積分を数値積分によって評価すれば、各積分点ごとに式 (3) を用いることで汎関数を離散化することができる。また、結果として求めた節点値を式 (3) に代入すれば、任意の点における未知量およびその微分値を計算することができる。数値積分の評価は、精度の低下を防ぐために、“セル” (図 1) と呼ばれる部分領域毎に実施される。しかしながら、セルは基本的に節点と無関係であり、従って、ここで提示した離散化過程は要素分割を必要としない。

以下、両端単純支持梁の大たわみ問題の解析を具体例として取り上げ、本研究で提案した Taylor 展開に基づく EFGM の有用性を示す。

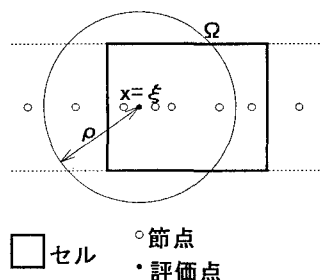


図 1. 評価点近傍の構造

3. 梁の大たわみ問題

図2に示したような、両端単純支持梁の大たわみ問題に対する汎関数は、無次元化した表示で次のように表される。

$$\Pi = \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{d\xi} \right)^2 + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{d\omega}{d\xi} - \sin \theta \right)^2 - \psi \omega \right\} d\xi + \frac{\beta}{2} \left\{ \left(\frac{d\theta}{d\xi} \right)_{\xi=-1}^2 + \left(\frac{d\theta}{d\xi} \right)_{\xi=1}^2 \right\} \quad (4)$$

ここに、 θ は傾斜角、 ω および ψ はそれぞれ無次元化されたたわみおよび荷重である。また、 α および β はペナルティー係数である。汎関数 Π は、付帯条件 $\omega(\pm 1) = 0$ を伴う。

前節で述べた Taylor 展開に基づく手続きに従えば、未知量となるたわみ ω および傾斜角 θ は、評価点 $x = \xi$ 近傍の節点値ベクトル $\hat{\omega}$ および $\hat{\theta}$ を用いて、それぞれ次のように表される。

$$\omega^{(i)}(\xi) = \mathbf{B}_j(\xi)^T \cdot \hat{\omega}, \quad \theta^{(i)}(\xi) = \mathbf{B}_j(\xi)^T \cdot \hat{\theta} \quad (5), (6)$$

式(5)・(6)を式(4)に代入し、積分をセル毎の数値積分で評価すれば、離散化された汎関数の表示が得られる。さらに、停留原理を適用すれば、離散化された釣り合い式を導くことができる。実際の数値計算の際には、梁の左端Aのたわみ角 θ_A を制御パラメータとした変位増分法を用いる。また、誤差の集積を防ぐために、各増分区間で不平衡節点力を評価した繰り返し計算を1回だけ実施する。

4. 数値計算例

具体例として、中央点 $\xi = 0$ に集中荷重 Γ を受けた場合の解析結果を示す。図3および4は、中央点におけるたわみ-荷重(ω - Γ)関係、およびモーメント-荷重(m - Γ)関係をそれぞれ表している。EFGMを用いた計算では、総節点数を21、セル総数を10、サポート半径を $\rho = 0.5$ 、ペナルティー係数を $\alpha = \beta = 10^4$ とし、数値積分として3次の Gauss 積分公式を用いた。また、節点は規則的に配置した。変位増分 $\Delta\theta_A$ の大きさは 1° で、 $\theta_A = 50^\circ$ まで計算した。

厳密解は、たわみ角 θ_A ($p \equiv \sin \theta_A$)をパラメータとし、楕円積分を用いて次式で計算された値である。

$$\begin{cases} \Gamma = 2F^2(\eta, k) ; k \equiv \sqrt{(1+p)/2}, \sin \eta \equiv \sqrt{p}/k & (7) \\ \omega(0) = p - \sqrt{2/\Gamma} \{ (p-1)\{K(k) - F(\phi, k)\} \\ + 2\{E(k) - E(\phi, k)\} \} ; \sin \phi \equiv 1/\sqrt{2k} & (8) \end{cases}$$

ここに、 $K(k)$ および $F(\phi, k)$ は第1種、 $E(k)$ および $E(\phi, k)$ は第2種の楕円積分をそれぞれ表している。図から明らかなように、EFGMによる解析では、厳密解とほぼ一致した解が得られている。

表1は、サポート半径による誤差の変化を示したものであり、 $\theta_A = 20^\circ$ の時の結果である。節点配置については、規則的なものと不規則的なものとの両者を考慮した。全体として、規則配置モデルの方が不規則配置モデルよりも良好な結果を与えていることがわかる。

表1. サポート半径と解析誤差

参考文献

- [1] B. Nayroles et al., Compt. Mech., 10 (1992)
- [2] T. Belytschko et al., Int. J. Numer. Methods. Engrg., 37 (1994)
- [3] Y. Lu et al., Compt. Methods Appl. Mech. Engrg., 133 (1994)
- [4] P. Lancaster et al., Math. Compt., 37 (1981)
- [5] 井浦 他, 構造工学論文集, 47A (1997)
- [6] T. Liszka et al., Compt. Methods Appl. Mech. Engrg., 133 (1994)

ρ	regular			irregular		
	ω	m	Γ	ω	m	Γ
0.3	1.92E-02	-4.22E+00	-1.14E-02	-1.57E-01	-9.17E+00	-1.37E+00
0.4	1.11E-03	-3.29E+00	-3.34E-02	-4.43E-02	-4.40E+00	-1.78E-01
0.5	1.07E-02	-2.86E+00	-2.42E-02	1.09E-01	-4.01E+00	-4.06E-01
0.6	1.37E-02	-2.84E+00	-2.71E-02	-1.08E-01	-3.08E+00	-3.01E-01
0.7	1.28E-02	-2.78E+00	-2.81E-02	-2.91E-03	-2.89E+00	-3.99E-01

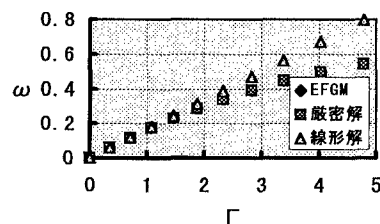


図3. たわみ-荷重関係

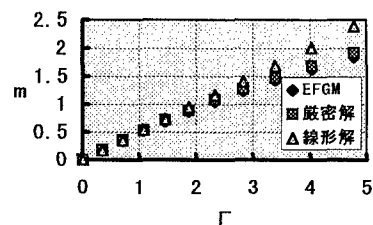


図4. モーメント-荷重関係