土木学会第52回年次学術講演会（平成９年９月）

I－A36

動的応答有限要素法での直接積分法における一考察

(財)鉄道総合技術研究所　正会員　山下彰彦
同上　正会員　富田健司

１．はじめに

鉄道構造物は、地震時に動的荷重を受け、列車走行時にも動的列車荷重を受けている。また、鉄道防災の落石防護設備は、落下する岩石から動的な力を受ける。鉄道構造物では、一般に、その設計において、衝撃力を静的荷重として換算評価して動的荷重を静的荷重に置き換え、力の釣り合いという視点から捉えてきた。近年の電子計算機での演算能力増大、単位演算コストの低下を受け、鉄道構造物を取り扱う際、演算量増加を容認し動的応答運動を直接取り扱うことにより、実際挙動に近いものに取り組むことが以前より容易になってきている。そこで、本研究では、重要構造物での動的挙動の把握という視点から、有限要素法での動的応答問題解法に関し、Newmark法やWilsonのθ法を中心に考察を行う。

２．動的応答有限要素法での平衡方程式と直接積分近似

要素慣性力を体積力として考慮し、速度に依存する減衰力を考慮すると、構造物の動的応答運動中の有限要素法系に対する平衡方程式は次の形となる。

$$M\ddot{U}+C\dot{U}+KU=R \tag{1}$$

ここでM、C、Kは順に質量、減衰、剛性のマトリックスであり、Rは外荷重ベクトル、U、$\dot{U}$、$\ddot{U}$はそれぞれ有限要素集合体の変位、速度、加速度のベクトルである。

中心差分スキームは時刻ｔでの平衡関係に基ずいて$U_{t+\Delta t}$を求める陽的積分法である。時刻 t+△tの平衡関係に基ずいて$U_{t+\Delta t}$を求めるものを陰的積分法と呼んでいる。陰的積分法のものにJ.C.Houbolt法、Newmark法やWilsonのθ法がある。J.C.Houbolt法は、振動運動だけでなく、トランジェント運動にも対応するものとして３次関数で時間軸に等間隔の４つの値$U_{t-2\Delta t}$、$U_{t-\Delta t}$、U_t、$U_{t+\Delta t}$を取り、$\dot{U}_{t+\Delta t}$と$\ddot{U}_{t+\Delta t}$を設定するようにしたものがである。中心差分スキームは２次関数で求めたものに相当する。N.M.Newmarkは時刻 t+△tにおける速度と変位を

$$\dot{U}_{t+\Delta t}=\dot{U}_t+(1-\gamma)\ddot{U}_t\Delta t+\gamma\ddot{U}_{t+\Delta t}\Delta t \tag{2}$$

$$U_{t+\Delta t}=U_t+\dot{U}_t\Delta t+(\frac{1}{2}-\beta)\ddot{U}_t\Delta t^2+\beta\ddot{U}_{t+\Delta t}\Delta t^2 \tag{3}$$

ここに、γとβはパラメータである。

と仮定する[2)]。Newmark法が使われるとき γとして1/2を採用するというのは、時刻[ｔ，t+△t]での加速度期待値として始点と終点での加速度の平均値をとるということである。文献２では、「S.Timoshenkoが1928年に ”Vibration Problems in Engineering” の中で γを1/2に取り、βを1/4に取っており、これは一定平均加速度法となっている。」と述べ、また「 線形加速度法は γを1/2に取り、βを1/6に取ることで表現でき、１自由度質点問題での試行関数だと、 γを1/2に取ると、βを1/6、1/8に取るのが適切である。」と論じている。Wilsonは、一般的で非線形動的応答にも適用できる方法を提案しており[3)]、時刻 t+△tにおける速度と変位を

動的応答、有限要素法、Newmark法、Wilsonのθ法

〒１８５　東京都国分寺市光町２-８-38　TEL ０４２５-７３-７２７３　FAX ０４２５－７３－７２７４

$$\dot{U}_{t+\tau}=\dot{U}_t+\frac{\tau}{2}(\ddot{U}_{t+\tau}+\ddot{U}_t) \tag{4}$$

$$U_{t+\tau}=U_t+\tau\dot{U}_t+\frac{\tau^2}{6}(\ddot{U}_{t+\tau}+2\ddot{U}) \tag{5}$$

ここに、τ＝t+θ△tで、$\theta\geq1$である。

とする。これは、始点加速度と終点加速度を結び、加速度を時刻ｔから時刻t+θ△tまで線形であるとするもので、線形加速度法である。通常はθ＝1.40を用いるとしている。前述したNewmark法でもγを1/2に取り、βを1/6に取るなら式(4)、式(5)にあたる式となるのであるが、τのところがt+θ△tでなくt+△tとなる。つまり、θ＝1.0と定値となるところだけが異なっている。Wilsonのθ法でθを何故に通例1.40にしたのかについては、文献４でも取り扱われている。その論理説明の展開では、t+θ△tで平衡方程式が

$$\ddot{x}_i+2\xi\omega\dot{x}_i+\omega^2x_i=r_i \tag{6}$$

ここに、ξはパラメータで、r_iはｉ番目要素の作用荷重である。

となる、つまり、減衰が解を正弦関数線形結合としたものの角振動数ωに比例するとし、減衰現象が要素間で連成せず各要素毎に分離したものである場合である。さらにξが小さく零に近い値をとるものとする。それに、r_iが零、つまり、無荷重であって、応答開始時の初期条件のみが規定されたものであるとする。それ等が満たされる条件の下で、応答計算をする時間刻み△tと正弦関数周期Ｔとの比△t/Tを大きくしてもＵが発散せず有界値となるということから、$\theta\geq1.37$を算出して、1.40を裏づけている。これまでの地震時の鉄道構造物の動きを考えてみると、構造物の減衰が動きの角振動数に比例するという条件設定は必ずしも妥当なものではなく、構造物の質量、更にはその組合わせ素材の力学的挙動の違い、基礎構造やシュー座の構造形式など多くの要素を含んでいるのではないかと思われる。このため、少なくとも、地震時での鉄道構造物での動的応答有限要素法において、直接積分法を用いた線形加速度法の場合、θ＝1.40がよいという根拠はあまりないと考えられる。

また、Newmark法において、βの値として1/6がいいのか、1/7がいいのか、1/8がいいのか、あるいは1/4がいいのかは、式(2)と式(3)から考えると、始点と終点での加速度の繋ぎ方に多くのケースを取りうることから、動的応答での波形により、この値がよいと限定することはまずできないものであり、γが1/2の時には、線形加速度と仮定するなら1/6前後を与えておくということになる。

３．まとめ

Newmark法はγを1/2に取り、βを1/6に与えると式(4)、式(5)に対応した線形加速度法の式となる。地震時の鉄道構造物の動的応答においては、Wilsonのθ法でいうθ＝1.40がよいという条件と明らかに異なっており、θ＝1.0としても差し支えない。

参考文献

1) J. C. HOUBOLT : "A Recurrence Matrix Solution for the Dynamic Response of Elastic Aircraft, "*Journal of Aeronautical Science*, Vol. 17, 1950, pp. 540-550.

2) N. M. NEWMARK : "A Method Computation for Structural Dynamics,"*A. S. C. E. , Journal of Engineering Mechanics Division*, Vol. 85, 1959, pp. 67-94.

3) E. L. WILSON, I. FARHOOMAND, and K. J. BATHE : "Nonlinear Dynamic Analysis of Complex Structures,"*International Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 1, 1973, pp. 241-252.

4) K. J. BATHE / E. L. WILSON著 菊池文男訳：有限要素法の数値計算，科学技術出版社，1979. 9.