土木学会第52回年次学術講演会（平成９年９月）

I－A35

ブロック三角化による高速並列 LU 分解

広島大学　正会員　○ 有尾　一郎*

1. はじめに

本研究は，ブロック対角化法を基礎理論に対称な系の剛性行列の LU 分解に適用することにより，LU 分解の並列化と高速化を図るものである．対称な構造系の剛性行列をブロック対角化し，対角ブロック毎に LU 分解を行うことにより，LU 分解の並列化・高速化と共に計算機で用いる所要配列容量の縮小化を実現する．対称構造系のネット構造に本手法を適用し，本手法の有用性と汎用性を検証する．

2. ブロック三角化

LU 分解はある正則な行列 K を下三角行列 L と上三角行列 U との積に分解する方法であるが，特に，$K = U^{\mathrm{T}}DU$ と分解する修正 Cholesky 分解法を用いることとする．ブロック対角化後の剛性行列 K^{μ} を修正 Cholesky 法により分解すると

$$K^{\mu} = (U^{\mu})^{\mathrm{T}} D^{\mu} U^{\mu}, \quad {}^{\forall}\mu \in R(G)$$

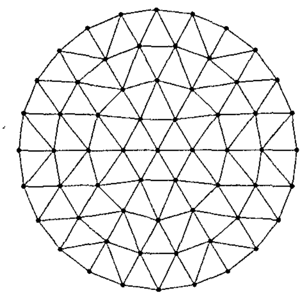
となる．ここに，U^{μ}, D^{μ} は既約表現毎の上三角行列および対角行列である．

一方，ブロック対角行列 $\widetilde{K}$ は

$$\begin{aligned}\widetilde{K} &= \widetilde{U}^{\mathrm{T}}\widetilde{D}\widetilde{U} \\ &= \mathrm{diag}[\cdots, K^{\mu}, \cdots] \\ &= \mathrm{diag}[\cdots, (U^{\mu})^{\mathrm{T}} D^{\mu} U^{\mu}, \cdots], \quad {}^{\forall}\mu \in R(G)\end{aligned}$$

と表される．ここに，

$$\begin{aligned}\widetilde{U} &= \mathrm{diag}[\cdots, U^{\mu}, \cdots] \\ \widetilde{D} &= \mathrm{diag}[\cdots, D^{\mu}, \cdots], \quad {}^{\forall}\mu \in R(G)\end{aligned}$$



図－1　D_n 不変系 m 層ネット構造 $(n = 6, m = 4)$

と既約表現 μ に対する分解が可能である．例えば，この $\widetilde{U}$ の具体形を書くと

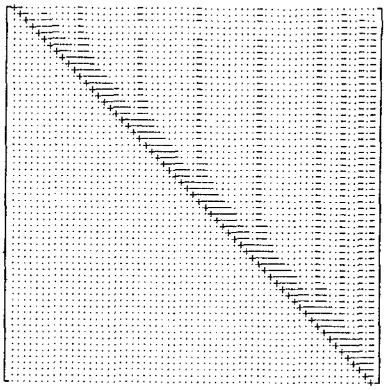
$$\widetilde{U} = \begin{bmatrix} * & & & & & O \\ & \begin{smallmatrix} * & * & * \\ & * & * \\ & & * \end{smallmatrix} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \begin{smallmatrix} * & * \\ & * \end{smallmatrix} & & \\ O & & & & \begin{smallmatrix} * & * & * \\ & * & * \\ & & * \end{smallmatrix} & \end{bmatrix}$$

となる．このように，各ブロックは完全に独立しているので，演算はブロック毎に行え，また，並列計算機による高速計算にも適している．

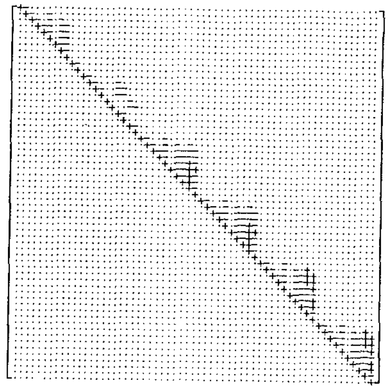
3. D_n 不変な構造系への適用

図－1 に示す１節点１自由度の n 角形 m 層ネット構造を数値計算例として取り上げる．**図－2**(a) は剛性行列を直接修正 Cholesky 分解したときの U を，**図－2**(b) は本手法によりブロック三角化した $\widetilde{U}$ を示す．ここに，パラメータ $(n, m) = (6, 4)$，行列内の＋は正値を，－は負値を，ドット $(\cdot)$ はゼロ成分をそれぞれ表す．本手法では，並列計算機を用いるときには各既約表現に対応する U^{μ} の配列を，また，単一計算機では全既約表現の中で最大の行列サイズの配列容量をそれぞれ確保しておけば十分であるので，所要記憶容量の大幅な縮小が図れる．

* 〒724 東広島市鏡山 1-4-1



(a) 直接法による上三角行列 U



(b) ブロック上三角化行列 $\tilde{U}$

図-２ 上三角行列 U とブロック上三角化行列 $\tilde{U}$

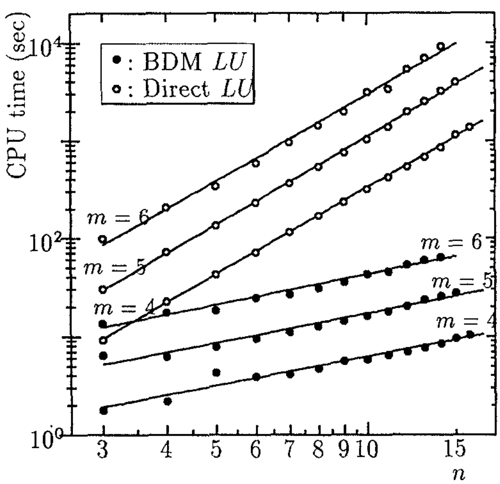


図-３ $3 \le n \le 16, 4 \le m \le 6$ に対する $U^{\mathrm{T}}DU$ 分解の実測時間

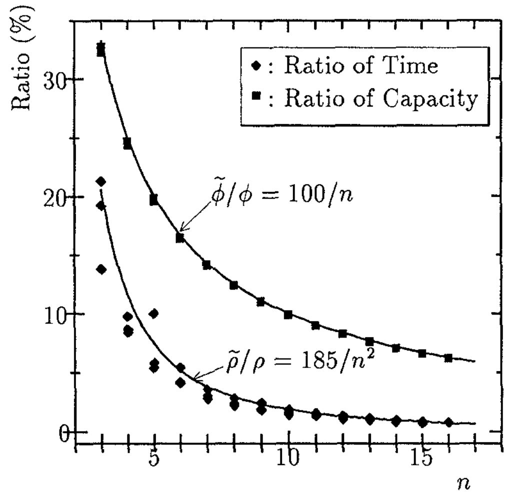


図-４ $3 \le n \le 16, 4 \le m \le 6$ に対する所要配列容量の圧縮比率と計算効率の比較

図-3は $U^{\mathrm{T}}DU$ 分解に費やした実計算時間を n に対する対数目盛りでプロットしたものであり，図中の直線はそれぞれの m に対する回帰直線を表す．この図から m に関係なく平均化すると直接法ではほぼ n^3 に，本手法では n にそれぞれ比例することが分かる．また，n を変化させたときの両手法の所要配列容量と計算効率の比率を図-4に示す．図中の印 (■) は所要配列容量の圧縮比率を示しており，n の増加に伴い比率は低下し，本手法の圧縮比率が相対的に向上している．また，このデータから平均化した近似式は $1/n$ に比例することが確かめられた．同様に印 (◆) で示す計算時間の効率比も，多少ばらつきはあるものの $1/n^2$ に比例することが実際に確かめられ，演算効率評価の妥当性を示せた．

参考文献

1) Ikeda, K., Ario, I. and Torii, K. : Block-diagonali-zation analysis of symmetric plates, *International Journal of Solids and Structures*, 29(22), pp.2779-2793, 1992.