I－A34

高速多重極境界要素法の３次元ポテンシャル問題への応用

福井大学大学院　学生員　○　玖津見敏広
福井大学工学部　正会員　　　福 井 卓 雄

1　はじめに

高速多重極境界要素法は高速多重極アルゴリズム [1] を利用して境界要素法の密行列方程式を極めて高速に解析する手法である。これまでに, 2 次元ポテンシャル問題 [2] および 2 次元静弾性問題 [3] に適用して, その高速性を確認してきた。ここでは, この手法を 3 次元のポテンシャル問題に適用する。

2　3 次元ポテンシャルの境界要素法

支配方程式が Laplace 方程式 $\nabla^2 u = 0$、境界条件が部分境界∂B_1で $u = \hat{u}$、∂B_2上で $\partial u/\partial n = \hat{s}$である境界値問題を考える。このとき境界積分方程式は、

$$C(\boldsymbol{x})\, u(\boldsymbol{x}) = \int_{\partial B} G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\, \frac{\partial u}{\partial n_y}(\boldsymbol{y})\, dS_y - \int_{\partial B} S(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\, u(\boldsymbol{y})\, dS_y \tag{1}$$

である。ここに $C(\boldsymbol{x})$ は点$\boldsymbol{x}$（オブジェクト点）の位置に依存するパラメータで、$\boldsymbol{x}$が領域内のとき $C = 1$、領域外のとき $C = 0$、なめらかな境界上にあるときには $C = 1/2$ の値をとる。また$\boldsymbol{y}$は境界上の点（ソース点）である。Laplace 方程式の基本特異解 $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ はニュートンポテンシャル

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} \tag{2}$$

であり、第二基本特異解 $S(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ は基本特異解の法線方向微分で与えられる。

3　高速多重極境界要素法

境界要素法における一つの問題点は, 式 (1) の離散化により得られる線形方程式の係数が密行列となることである。このために, 問題の自由度を N とすると, 記憶容量は $O(N^2)$, 計算量は $O(N^2)$〜$O(N^3)$ となって, これまでの直接的な方法では大規模な問題を解析することが困難であった。この困難を回避する一つの方法が高速多重極境界要素法である。

高速多重極アルゴリズムは, あるグループに含まれる要素による遠方の点への影響は, そのグループの近傍におかれた多重極により表現できる, という事実に基づいている。グループにたくさんの要素が含まれていて, その数が展開の項数よりもはるかに大きければ, 多重極展開を使えば計算量を $O(N)$ 程度まで省略できるという訳である。高速多重極境界要素法では基本特異解 (2) の多重極展開を求めることが必要になってくる [2]。いまの場合には基本特異解は Newton ポテンシャルであるので, $\boldsymbol{x} = (r,\theta,\phi)$, $\boldsymbol{y} = (\rho,\alpha,\beta)$ とすると, その多重極展開は次のようになる。

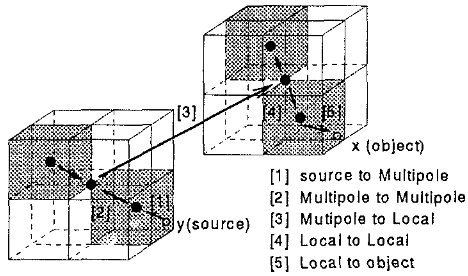
$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} \frac{M_n^m}{r^{n+1}} Y_n^m(\theta,\phi) \qquad M_n^m = \rho^n Y_n^{-m}(\alpha,\beta) \tag{3}$$

ここに, 球関数 $Y_n^m(\theta,\phi)$ は Legendre の陪関数を用いて,

$$Y_n^m(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{(2n+1)}{4\pi}\,\frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}}\; P_n^{|m|}(\cos\theta) e^{im\phi} \tag{4}$$

で表される。M_n^m は多重極展開の係数で, 第 2 基本特異解の多重極展開の係数は, M_n^m の法線導関数をとれば得られる。

キーワード： 高速多重極境界要素法、ポテンシャル値の評価
連絡先： 〒910 福井市文京 3-9-1, Tel. 0776-27-8596, Fax. 0776-27-8746



Fig–1 Fast Multipole Method

従来の方法は y点（ソース点）から直接に x 点（オブジェクト点）のポテンシャル値を評価するのに対して、ポテンシャル値を評価は次のように行なう。まず，領域全体を含む立方体を考え，これを順次８等分したセルを作ることにより，境界要素の集合を８分木で構造化する。すべての計算はこの木の構造の上で行なわれる（**Fig-1**)。計算は三段階に分かれる。第一段階はすべてのセルについて個々のセルに含まれるすべての要素からの効果を多重極展開する。計算は葉からはじめて順次親のセルに多重極の係数を引き渡す形で行なう（**Fig-1**の [1],[2])。第二段階は遠方のセルからの影響を各要素が含まれるセルの中心に関する局所展開として計算し，それを使って求める点のポテンシャル値を計算する。計算は根からはじめて順次子のセルに局所展開の係数を引き渡す形で行なう（**Fig-1**の [3],[4],[5])。最後に第三段階として，近傍の要素からの影響を直接に計算する。

上の計算過程を実行するためには，以下のような係数の変換が必要である。第一段階では，式 (3) により求めた多重極係数を親のセルに引き渡すために，多重極点の移動による係数の変換

$$\tilde{M}_j^k = \sum_{n=0}^{j}\sum_{m=-n}^{n} \frac{i^{|k|-|m|-|k-m|} A_n^m A_{j-n}^{k-m} \rho^n Y_n^{-m}(\alpha,\beta)}{A_j^k} M_{j-n}^{k-m} \qquad A_n^m = \frac{(-1)^n}{\sqrt{(n-m)!(n+m)!}} \tag{5}$$

を行なう。第二段階では，ポテンシャルをセルの中心に関する局所展開

$$u(x) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=-j}^{j} L_j^k Y_j^k(\theta,\phi) r^j \tag{6}$$

で表現する。したがって，多重極係数から局所展開の係数への変換

$$L_j^k = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} \frac{i^{|k-m|-|k|-|m|} A_n^m A_j^k Y_{j+n}^{m-k}(\alpha,\beta)}{(-1)^n A_{j+n}^{m-k} \rho^{j+n+1}} M_n^m \tag{7}$$

が行なわれる。さらに，親のセルに関する展開を子のセルに引き渡すために，局所展開の中心を移動することによる係数の変換

$$\tilde{L}_j^k = \sum_{n=j}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} \frac{i^{|m|-|m-k|-|k|} A_{n-j}^{m-k} A_j^k Y_{n-j}^{m-k}(\alpha,\beta)\rho^{n-j}}{(-1)^{n+j} A_n^m} L_n^m \tag{8}$$

が必要となる。以上の計算は係数の引渡しによって行われるので係数行列を保持する必要がなく記憶容量も節約することができ、効率良くポテンシャル値を評価できる。

参考文献

[1] Greengard, L.: A short cource on fast multipole methods, *Lecture Notes, VIIth EPSRC Numerical Analysis Summer School, Leicester University, U.K., 8th-19th July,* 1996.

[2] 福井卓雄, 服部純一, 土居野優: 高速多重極法の境界要素解析への応用, 構造工学論文集, Vol. 43A, 1997.

[3] 福井卓雄, 持田哲郎: 高速多重極境界要素法の２次元静弾性問題への応用, 境界要素法論文集, 第 13 巻, pp. 131-136, 1996.