土木学会第52回年次学術講演会（平成９年９月）

I－A27

大規模固有値問題に対応した鋼製橋脚の安定解析

○中央大学　学生員　大越 靖広
中央大学　正員　川原 睦人

1 はじめに

構造物の安定性を調べることは、その構造物の挙動を調べるうえで大変重要である。１９９５年に発生した兵庫県南部地震によって土木構造物ならびに各種都市機能が甚大な被害を受けたことは、極めて深刻に受けとめられており、その原因の究明が急がれている。橋脚の安定解析を行なう方法として、1. 骨組構造として解析する、2. 橋脚を平板の集合と考えて解析する、の二通りが挙げられる。しかし前者では局部座屈を扱うことが不可能であり、後者では汎用プログラムを用いると、マンホールやダイヤフラムなどの細部まで有限要素分割するには容量の面から制限があった。ところが橋脚のマンホール付近に局部的な座屈の現象が見られたことなどから、橋脚の細部まで考慮に入れた解析を行なう必要がある。したがって本研究では平板の有限変形理論を用いて、橋脚の大変形解析はもとより、固有値解析でも細かい有限要素分割を行なって解析することを目標としている。

2 板構造の解析

2.1 面内変形問題（平面問題）

対象とする平板の厚さが薄くて一様な場合 (平面応力問題）には、板の内部において、応力成分$\sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}$が無いと考えても無理がない。このような理想化をすることによって、３次元連続体の一般的な基礎方程式から、２次元問題としての平面応力、平面ひずみの基礎方程式を得ることができる。求めるべき解は、平面問題の最小ポテンシャルエネルギーの原理の汎関数を最小にするものであるので、有限要素方程式は次のように得ることができる。

$$F = Ku \tag{1}$$

$$K = h\int\int P^T DPdxdy \tag{2}$$

Pはひずみ、変位行列を表す。また、本研究では橋脚を４枚の平板の集合と考えているので、ある面の面外の曲げはとなりの面の面内の曲げになることから、面内問題についても曲げを考慮しなくてはならない。そこで、本研究では接点外力として式 (3) を考慮している。

$$\theta = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \tag{3}$$

またここでは長方形要素を用いているので、要素内の u、vおよびθのそれぞれを 4 つの係数で表される多項式によって補間する。

2.2 面外変形問題（曲げ問題）

$Kirchhoff - Love$ の仮定に基づいて考える。等方性の薄板の曲げに関する支配方程式は、4 階の偏微分方程式として表すことができ、有限要素法を用いて離散化することによって、有限要素方程式を得る。ここでも長方形要素を用いているので、要素内の変位ωを 12 の係数を有する多項式で補間し、局所座標系に変換して整理すると、次のような剛性行列を得る。

$$K = \int\int P^T DPdxdy \tag{4}$$

Pはひずみ、変位行列を表す。

3 平板の有限変形理論

座屈を支配する厳密な方程式には、面内変形と面外変形との間に複雑な連成が存在するが、ここでは板厚が他の寸法に比べて小さいと仮定する。座屈前の平面応力場の支配方程式$\delta V_P + \delta W_P = 0$と座屈変形を支配する仮想仕事方程式$\delta U - \delta W_P = 0$が、座屈変形がおこる瞬間同時に成立することから、座屈方程式が得られ、δV_Pと$\delta W^{(0)}$を計算して代入すると、基礎方程式が得られる。この場合の初期応力のポテンシャルは次式のようになる。

$$w^{(0)} = \frac{1}{2}\int\int\{N_x^{(0)}(\frac{\partial w}{\partial x})^2$$

$$+2N_{xy}^{(0)}(\frac{\partial w}{\partial x})(\frac{\partial w}{\partial y}) + N_y^{(0)}(\frac{\partial w}{\partial y})^2\}dxdy$$

$$= \frac{1}{2}a^T K_G a \tag{5}$$

ここに、

$$K_G = \int\int G^T N^{(0)} Gdxdy \tag{6}$$

であり、K_Gは初期応力行列を表す。

キーワード：　有限要素法、有限変形理論、固有値問題
中央大学大学院理工学研究科 (〒112 東京都文京区春日 1-13-27, TEL 03-3817-1814, FAX 03-3817-1803)

4 安定解析の手法

リヤプノフの安定理論に基づく安定解析を適用しているが、これを用いると、本研究では結局剛性行列の固有値を求めることになるので、その過程は省略する。また、固有値を求めるべき行列がとても大きい (節点数×6) ので、二分法などを用いて直接全体を解くことはできない。したがって本研究では *Arnoldi's* 法を用いて固有値を計算している。この計算法を用いると得たい固有値(ここでは最大固有値) の周辺だけを求めることができる。つぎに *Arnoldi's* 法のアルゴリズムを簡単に紹介する。

1. ベクトル v_1 を単位ノルムにし、
   ステップ数 m(求めたい固有値の数) を決定する。
2. 以下を j=1 から m まで繰り返し計算する。

$$\hat{v}_{j+1} = Cv_j - \sum_{i=1}^{j} h_{ij} v_i \tag{7}$$

$$h_{ij} = (Cv_j, v_i), i = 1, ..., j \tag{8}$$

$$h_{j+1,j} = ||\hat{v}_{j+1}|| \tag{9}$$

$$v_{j+1} = \hat{v}_{j+1}/h_{j+1,j} \tag{10}$$

ここで求めた V_m を用いると、ヘッセンベルグ行列と呼ばれる H_m が次のように求まる。H_m と C には相似性の関係があり、H_m の固有値は C の固有値、又は C の固有値の一部である。すなわち全ての固有値を求めずに、一部だけを計算することが可能である。

$$H_m = V_m^T C V_m \tag{11}$$

このアルゴリズムをそのまま用いると、固有値の実数部分の絶対値が大きい方から求まることになる。しかし、本研究で求めたい最大固有値は 0 付近に存在するので、次にしめすように、式 (7) の C には $K + K_G$ の逆行列を用いなければならない。

$$C^{-1}\Phi = \lambda\Phi \tag{12}$$

そこで本研究では、$K + K_G$ の逆行列を解く際にも Element-by-Element PCG 法を用いて、大規模な計算を行なえるようにしている。

5 数値計算例

ダイヤフラムを三ヶ所設けた場合 (図-1) とマンホールを設けた場合 (図-2) を解析した。節点数および要素数は、図-1、図-2 それぞれ 12203、12000 と 10880、10800 である。橋脚のサイズは $1.2 \times 1.2 \times 8.1(m)$ である。板厚は $0.01(m)$、剛性は $2.1 \times 10^7 (t/m)$ とする。ダイヤフラムの位置は下から $1.02, 4.02, 7.02(m)$ とし、マンホールは下から $1.97(m)$ のところに $0.72 \times 0.84(m)$ のサイズで設置した。このときの解析結果は図-3 に示す。図-3 よりダイヤフラムを設けると強度が設けないときにくらべ、約 10%上がり、逆にマンホールを設けると強度が約 10%下がることが分かる。これによりダイヤフラムやマンホールの特性はある程度つかめていると考えられる。

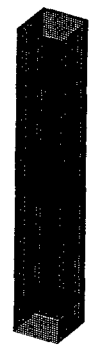

図-1: ダイヤフラム

図-2: マンホール

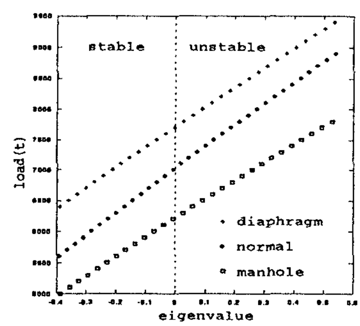

図-3: 固有値

6 おわりに

本研究で提唱したように、固有値計算 (Arnoldi's 法) に Element-by-Element PCG 法の考えを適用することによって、コンピュータの容量という点では有限要素分割の制限を大幅に緩和することができた。これにより、ダイヤフラムやマンホールといった橋脚の細部を考慮しての解析が可能であり、局部的な座屈にも対応できると考えられる。

参考文献

1. 吉田 裕 、川原 睦人：新体系土木工学 3 有限要素法、技報堂出版、1983
2. 川井 忠彦: 座屈問題解析、培風館、1991
3. Peter C.Muller ： 安定性と行列、Springer-Verlag Tokyo、1989
4. Ding,Y and Kawahara,M : Linear stability of incompressible flow using finite element method, submitted to J.comp.Phys,1997